Test n°2 – Durée : 40'

Corrigé

Exercice 1 [12 pts] – Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -3x^2 + 5x - 2$.

1. Mettre l'expression $-3x^2 + 5x - 2$ sous la forme $a(x-h)^2 + k$.

$$-3x^2 + 5x - 2 = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}$$

2. Écrire, sans justifier :

- Les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{P}$: $\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{12}\right)$
- Une équation de l'axe de symétrie de la parabole $\mathcal{P}$: $x = -\frac{5}{6}$
- La transformation qui permet de tracer $\mathcal{P}$ lorsque l'on déjà tracé la parabole d'équation $y = -3x^2$: c'est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

3. Cette parabole coupe-t-elle l'axe des x ? Justifier.

Le discriminant du trinôme $-3x^2 + 5x - 2$ vaut $\Delta = 1 > 0$. La parabole $\mathcal{P}$ coupe l'axe des x en deux points.

4. Écrire sans justifier, selon les valeurs de x, le signe de l'expression $-3x^2 + 5x - 2$.

Le trinôme $-3x^2 + 5x - 2$ s'annuel en 1 et en $\frac{2}{3}$.
Le coefficient de $-3x^2$ est -3 et $-3 < 0$. On en déduit :
- Pour $x < 2/3$ ou $x > 1$, $-3x^2 + 5x - 2 < 0$.
- Pour $2/3 < x < 1$, $-3x^2 + 5x - 2 > 0$.

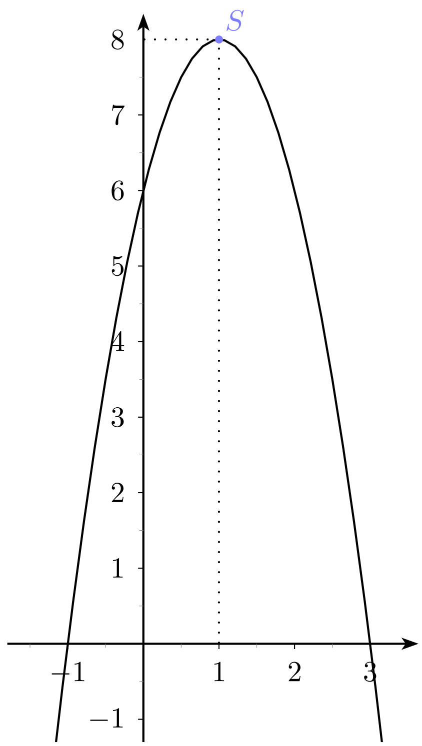
Exercice 2 [12pts] – Résoudre les équations suivantes :

$3x^2 - x - 10 = 0$
$\Delta = 121 = 11^2$. Deux solutions : $\boxed{x = 2 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}}$

$3t^2 - 1 = \dfrac{10}{t^2}$
Pour $t \neq 0$, l'équation s'écrit : $3t^4 - t^2 - 10 = 0$.
Posons $x = t^2$. Il vient :$3x^2 - x - 10 = 0$
D'où $t^2 = 2$ ou $t^2 = -\frac{5}{3}$.
L'équation $t^2 = -\frac{5}{3}$ n'a pas de solution car le carré d'un réel est toujours positif.
L'équation $t^2 = 2$ donne : $\boxed{t = \pm\sqrt{2}}$

$3u - \sqrt{u} = 10$
Pour $u \geq 0$, on pose $x = \sqrt{u}$ et l'équation devient $3x^2 - x - 10 = 0$.
D'où $\sqrt{u} = 2$ ou $\sqrt{u} = -\frac{5}{3}$.
L'équation $\sqrt{u} = -\frac{5}{3}$ est sans solution puisque la racine carrée d'un réel positif est positive.
L'équation $\sqrt{u} = 2$ donne $\boxed{u = 4}$

Exercice 3 [8 pts] – Le graphique ci-dessous montre une partie de la parabole d'équation $y = ax^2 + 4x + c$.



1. Donner la valeur de c en justifiant :

D'après l'équation $y = ax^2 + 4x + c$, pour $x = 0$, $y = c$. Or la parabole coupe l'axe des y en $(0; 6)$, donc $c = 6$.

2. Écrire l'équation de cette parabole sous la forme $y = a(x+p)(x+q)$ en justifiant :

La parabole passe par $(3;0)$ et $(-1;0)$ donc son équation peut se mettre sous la forme $y = a(x-3)(x+1)$.
De plus, pour $x = 1$, $y = 8$, donc $a = -2$. Ainsi, l'équation de la parabole peut se mettre sous la forme : $\boxed{y = -2(x-3)(x+1)}$

Exercice 4 [8 pts] – Soit l'expression $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{2x+1}$.

1. Exprimer cette expression sous la forme d'une seule fraction :

Pour $x \neq 3$ et $x \neq -1/2$,
$\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{5x-1}{(x-3)(2x+1)}$

2. Résoudre $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{5}{2x-3}$.

Pour $x \neq 3$ et $x \neq -1/2$, l'équation devient : $\dfrac{5x-1}{(x-3)(2x+1)} = \dfrac{5}{2x-3}$
$(5x-1)(2x-3) = 5(x-3)(2x+1)$
$10x^2 - 17x + 3 = 10x^2 - 25x - 15$
$8x = -18$
$\therefore\ x = -9/4$