Relations, Fonctions et Bijections

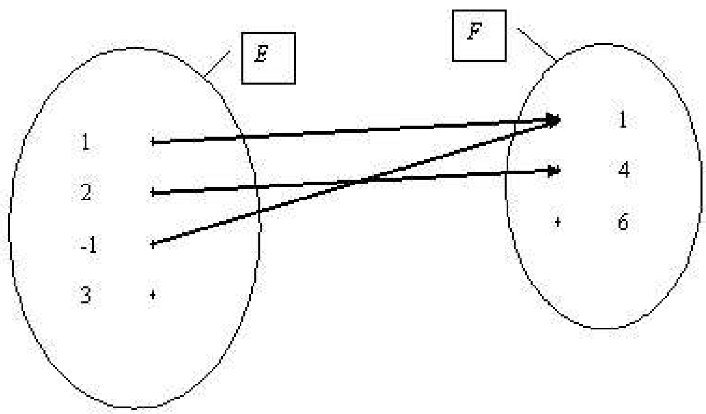
Livre : page 79 à 103.

1 Vocabulaire

Soient 2 ensembles E et F non vides : prenons par exemple, les ensembles $E = \{1; 2; -1; 3\}$ et $F = \{1; 4; 6\}$.

Soit x un élément de E et y un élément de F ; la phrase "x a pour carré y" permet d'établir un lien entre les éléments de E et ceux de F : on dit que l'on a défini une *relation* de E **vers** F à l'aide du *lien* "a pour carré". E est l'ensemble de *départ* et F est l'ensemble d'*arrivée* de la relation.

Par exemple, 2 qui est un élément de E , a pour carré l'élément 4 de F : on dit que le couple $(2; 4)$ vérifie la relation ; 4 est **une** *image* de 2 et 2 est **un** *antécédent* de 4 par cette relation.
Lorsqu'on détermine tous les couples [1] $(x; y)$, avec $x \in E$ et $y \in F$, vérifiant la relation, on dit qu'on établit le *graphe* de la relation.
On peut par exemple représenter ce graphe à l'aide d'un diagramme *sagittal* [2] :



Exercice 1 : On considère les mêmes ensembles E et F que ci-dessus et la relation de E vers F définie par le lien verbal "a pour carré".

1. Déterminer, si elles existent, les images dans F de tous les éléments de E.
2. Déterminer, s'ils existent, les antécédents dans E de tous les éléments de F.

Exercice 2 : Soient $(a; b)$ un couple de nombres réels : on dit que ce couple vérifie la relation R lorsque $a^2 + 1 = ab^2$.

1. Déterminer tous les réels a tels que le couple $(a; 2)$ vérifie la relation $a^2 + 1 = ab^2$.
   On dit qu'on a déterminé les antécédents de 3 *pour cette relation.*
2. Déterminer tous les réels b tels que le couple $(3; b)$ vérifie la relation $a^2 + 1 = ab^2$.
   On dit qu'on a déterminé les images de 3 *pour cette relation.*

2 Fonctions et applications

Soient E et F deux ensembles (non vides).

Définitions : Une relation f de E vers F telle que tout élément de E admette **au plus une** image dans F est appelée *fonction*. Si elle existe, l'**unique** image de l'élément x de E se note $f(x)$ et on écrit : $x \mapsto f(x)$.

L'ensemble des x de E ayant une image par f est appelé *domaine de* f : on le note souvent D_f.
L'ensemble $\{f(x); x \in D_f\}$ est inclus dans F est appelé *ensemble image* de f.

Une relation g de E vers F telle que **tout** élément de E admette **exactement une** image dans F est appelée *application*. L'unique image de l'élément x de E se note encore $g(x)$ et on écrit : $x \mapsto g(x)$.

1. L'ensemble des couples $(x; y)$, avec $x \in E$ et $y \in F$, se note $E \times F$, ce qu'on lit "E croix F" ; cet ensemble est appelé *produit cartésien de E par F*.
2. Du latin *sagitta, ae* : flèche.

Exercice 3 : On reprend les ensembles E et F de la partie 1.

1. La relation de E vers F définie par le lien verbal “a pour carré” est-elle une fonction ?
2. Soit $(x; y)$ un couple de réels : on dit que ce couple vérifie la relation f lorsque $3x^2 + y = 1$.
   f est-elle une fonction ? Cette relation est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 4 : On considère une plaque de carton carrée de côté 50 cm. On découpe à chaque coin de cette plaque un carré de côté x et on peut fabriquer une boîte dont le volume V, en cm^3, dépend de x : V est donc une fonction de x.

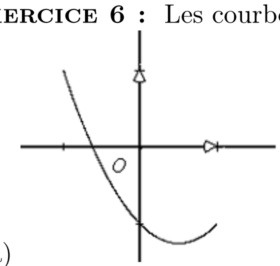
1. Exprimer V en fonction de x.
2. On pose $V = f(x)$: quel est l’ensemble de définition de la fonction f ?
3. Calculer $f(10)$ et $f(20)$.

On ne considère maintenant que des fonctions dont l’ensemble de définition et l’ensemble image sont inclus dans $\mathbb{R}$.

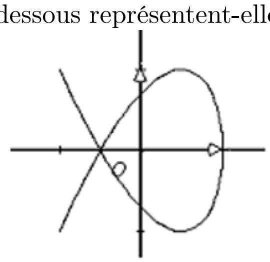
Définition [Courbe représentative] : Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Dans le plan muni d’un repère, l’ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, où x décrit D, constitue la *courbe représentative* (ou encore le *graphe*) de f.
Soit C_f cette courbe ; on dit que : $y = f(x)$ (avec $x \in D$) est une *équation* de cette courbe. Ce qui signifie :
• si $M(x; y) \in C_f$, alors $x \in D$ et $y = f(x)$;
• si $x \in D$ et $y = f(x)$, alors $M(x; y) \in C_f$.

Exercice 5 : Esquisser avec une calculatrice graphique la courbe de la fonction f de l’exercice 4.

Exercice 6 : Les courbes ci-dessous représentent-elle des fonctions ?



(a)



(b)

3 Composition de fonctions

Définition : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles E et F. On suppose que pour tout $x \in E$, $f(x) \in F$. On définit alors sur E la *composée* de f suivie de g, notée $g \circ f$ ou gf, par $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

Remarque
Soit $x \in \mathbb{R}$; le réel $g \circ f(x)$ est défini lorsque x est dans le domaine de f **et** $f(x)$ est dans le domaine de g.

On a le schéma suivant : $x \in E \longmapsto f(x) = y \in F \longmapsto g(y) = g[f(x)]$.

Exercice 7 : Exercices 2, 3 et 7 page 97.

4 Bijections

Exercice 8 : On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout x associe le réel $f(x) = 2x - 1$.

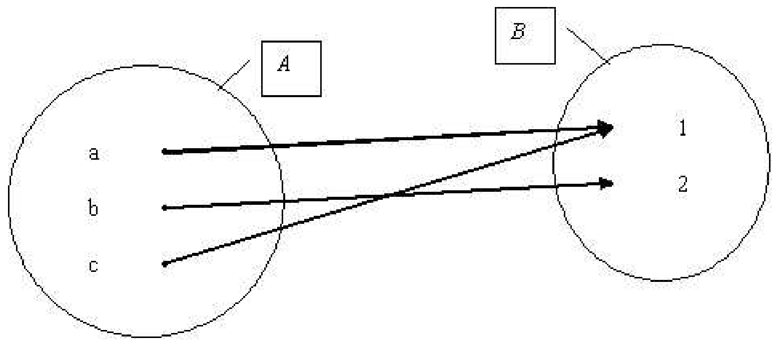
1. Déterminer les antécédents de 0 et de 1 par f.
2. Soit y un réel quelconque ; ce réel admet-il des antécédents par f ? Si oui, combien et quels sont-ils ?

Il se peut que par une fonction de E vers F, deux (ou plusieurs) éléments distincts de E aient cependant la même image par f. En revanche, il se peut aussi que deux élément distincts aient toujours des images distinctes.

Définition : Une fonction f définie sur l'ensemble E, dont les images sont dans l'ensemble F, telle que tout élément y de ... admette **un unique** antécédent x dans ... est appelée *bijection*.

EXERCICE 9 :

1. La fonction $f(x) = 2x - 1$ est-elle bijective ?
2. La fonction $u(x) = (x-2)^2$ est-elle bijective ?
3. La fonction $v(x) = (x-2)^2$, avec $x \geq 2$ est-elle bijective ?
4. On considère l'application g de $A = \{a, b, c\}$ dans $B = \{1, 2\}$ définie par le diagramme sagittal ci-dessous. Est-elle bijective ?



5. On considère l'application h de $U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ dans $V = \{1\,;2\,;3\}$ définie par $h(\alpha) = 3$, $h(\beta) = 1$ et $h(\gamma) = 2$. h est-elle une bijection ?

Définition : Soit f une bijection de E dans F ; on peut définir une nouvelle fonction de F dans E, qui à tout y de F associe son unique antécédent x dans E. Cette fonction est elle-même une bijection, appelée *bijection réciproque* de f et notée f^{-1}.

EXERCICE 10 :

1. Déterminer les bijections réciproques respectives des bijections f, v et h de l'exercice 9.
2. Que valent, pour x dans un ensemble à préciser à chaque fois, les images $(h \circ h^{-1})(x)$ et $(h^{-1} \circ h)(x)$.

Propriétés : Soit f une bijection de E vers F. Quand on compose la bijection f avec sa bijection réciproque f^{-1}, alors :

$$\text{Pour tout } x \in \ldots\ldots, \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$\text{Pour tout } x \in \ldots\ldots, \quad f \circ f^{-1}(x) = x$$

Définition : Soit A un ensemble : la fonction qui à tout x de A associe x est appelée *identité* de A.

EXERCICE 11 : Soit r la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $r(x) = \sqrt{x}$.

1. Prouver qur r est une bijection et définir sa bijection réciproque r^{-1}.
2. Représenter dans un repère **orthonormé** les courbes de r et r^{-1}, ainsi que la droite d'équation $y = x$. Quelle conjecture "géométrique" peut-on faire ?

Théorème : Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de I dans J. Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, les courbes représentatives des bijections f et f^{-1} sont symétriques par rapport à ....