Devoir à la maison n°1
Corrigé

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes et donner les solutions sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a et b appartiennent à $\mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$.

(a)

$$x\sqrt{2}+1 = 3x-4$$
$$x(3-\sqrt{2}) = 5$$
$$\therefore\ x = \frac{5}{3-\sqrt{2}}$$

Ensuite, il faut rendre le dénominateur rationnel :

$$x = \frac{5}{3-\sqrt{2}} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

Or, $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 9-2 = 7$,

$$\therefore\ x = \frac{15}{7} + \frac{5}{7}\sqrt{2}$$

(b) $\dfrac{x\sqrt{2}+1}{3} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{12}$
On multiplie par 12 les deux membres de l'équation :

$$4x\sqrt{2}+4-3x = 6+x$$
$$4x(\sqrt{2}-1) = 2$$
$$\therefore\ x = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

Ici aussi, on rend rationnel le dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur par $(\sqrt{2}+1)$

$$\therefore\ x = \frac{\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}^2-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1;1+\sqrt{5})$ et $B(\sqrt{5};-3)$.

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (\sqrt{5}-1; -4-\sqrt{5})$.
2. Déterminer une équation de la droite (AB) sous la forme $y = mx+c$, avec m et c à dénominateurs entiers.
   $m = \dfrac{-4-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{(-4-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = -\dfrac{5\sqrt{5}+9}{4}$.
   $c = y_B - mx_B = -3 + \dfrac{5\sqrt{5}+9}{4}\sqrt{5} = \dfrac{13+9\sqrt{5}}{4}$.
   Une équation de la droite (AB) est $y = -\dfrac{5\sqrt{5}+9}{4}x + \dfrac{13+9\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3 : Pour quelles valeurs de a le système suivant admet-il une unique solution ? Déterminer alors la valeur de cette solution en fonction de a.

$$\begin{cases} ax+y &= 1 \\ x+ay &= a \end{cases}$$

Un systeme linéaire admet une unique solution lorsque son déterminant est différent de 0 : ici, ce déterminant vaut $a \times a - 1 \times 1 = a^2 - 1$. Ce nombre est non nul lorsque $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
Conclusion : le systeme admet une unique solution lorsque $a \neq 1$ et $a \neq -1$.

Résolution :

1. On multiplie la première équation par a et on retranche la seconde :

$$a^2x - x = a - a$$

$$(a^2-1)x = 0$$

$$\therefore\ x = 0$$

2. Puisque $x = 0$, la première équation donne $y = 1$.

Remarque : on pouvait s'attendre à ce que les solutions dépendent de a ; en fait, il n'en est rien !

Exercice 4 : Déterminer le réel y de sorte que les points $M(1;-2)$, $N(3;5)$ et $P(6;y)$ soient alignés.
Les points M, N et P sont alignés lorsque la pente des droites (MN) et (MP) sont égales. D'où l'équation :

$$\frac{7}{2} = \frac{y+2}{5}$$

$$2(y+2) = 35$$

$$\therefore\ y = 15.5$$

Conclusion : M, N et P sont alignés lorsque $y = 15.5$.