1 IB MATH SL **Le 12 mai 2009**

TEST n°6 - Corrigé

40 minutes

La calculatrice est autorisée.

1. On considère le développement de $(x^2 - 2)^5$. **(6 pts)**

(a) Ce développement contient 5 + 1 = 6 termes.

(b) A = $\binom{5}{3}(-2)^3 = -80$.

2. Dans développement de $\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^8$, le terme en x^3 est

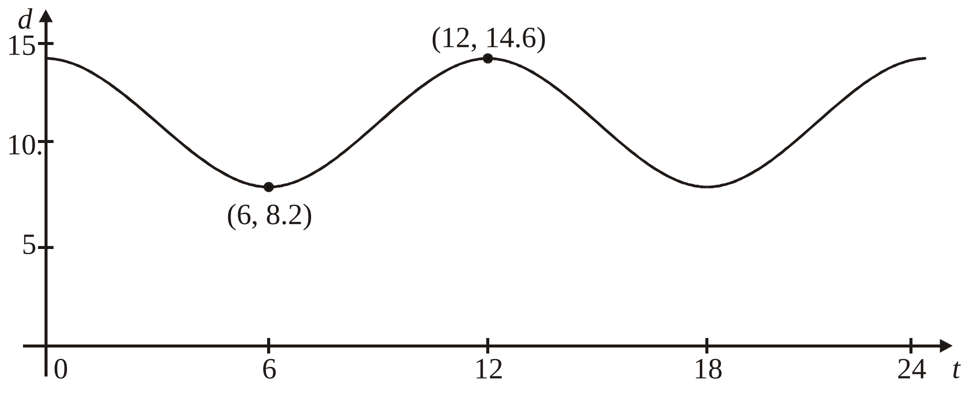
$$\binom{8}{5}\left(\frac{2}{3}x\right)^3(-3)^5 = -56 \times \frac{8}{27} \times x^3 \times 243 = -4032\, x^3$$

(5 pts)

3. Une formule donnant la profondeur *d* mètres de l'eau dans un port à l'instant *t* en heures après minuit est donnée par :

$$d = P + Q\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \quad 0 \leq t \leq 24,$$

Où *P*et *Q* sont des constantes **positives**. Dans le graphe suivant, le point (6, 8.2) est un point minimum et le point (12, 14.6) est un point maximum.



(a) Trouver la valeur de :

(i) $|Q| = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = 3.2$

(ii) $P = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = 11.4$

Pour $t = 6$, $d = 8.2 = 11.4 + Q\cos(\pi) = 11.4 - Q$, il vient $Q = 3.2$

(3 pts)

(b) On résout $11.4 + 3.2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 10$, d'où $\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{10 - 11.4}{3.2}$=-0.4375.

Ainsi, $\frac{\pi}{6}t = (\arccos(-0.4375))$ et $t = \frac{6\arccos(-0.4375)}{\pi}$=3.86 h (3 c.s.)

(3 pts)

(c) (i) La droite $t = 6$ est axe de symétrie du graphe et 6 – 3.86 = 2.14.

Le prochain instant ou la profondeur est de 10 m est 6 + 2.14 = 8.14 h.

(ii) Le premier intervalle de temps est $3.86 < t < 8.14$ et avec la périodicité de période 12, on obtient le deuxième intervalle $15.9 < t < 20.1$ **(4 pts)**

4. (a) L'équation $4x^2 + kx + 1 = 0$ admet deux racines égales lorsque son discriminant $\Delta = 0$.

Ainsi, $k^2 - 16 = 0$ et $k = \pm 4$.

(3 pts)

Soit f la fonction $f(\theta) = 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 3$, pour $-360° \leq \theta \leq 360°$.

(b) $:f(\theta) = 2\,(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 1 = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 = (2\cos\theta + 1)^2$.

(1 pt)

(c) Soit l'équation $f(\theta) = 0$, pour $-360° \leq \theta \leq 360°$.

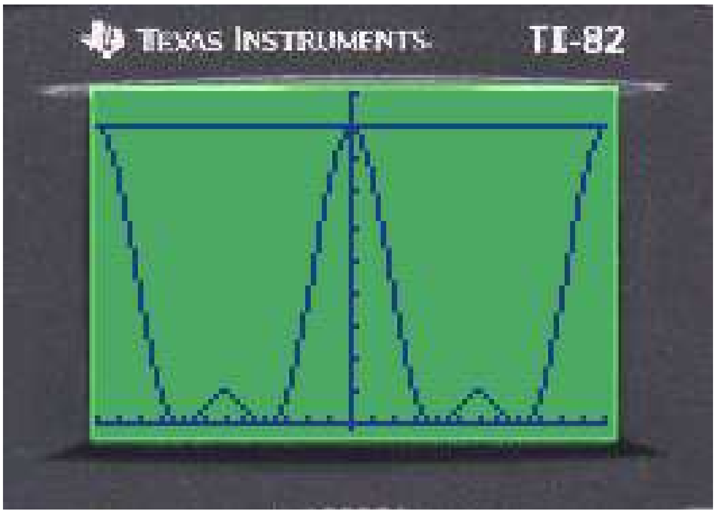
(i) L'équation s'écrit $(2\cos\theta + 1)^2$=0, d'où $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

(ii) Les valeurs solutions sont donc, grâce au cercle trigonométrique notamment :

$$\{-120°, -240°, 120°, 240°\}$$

(5 pts)

(d) On trace la courbe de f sur la calculatrice et on remarque que la droite d'équation $y = 9$ est la seule qui coupe 3 fois, et 3 fois seulement, la courbe de f :



(2 pts)

5. (a) Pour tout x, $2\cos^2 x + \sin x = 2\,(1 - \sin^2 x) + \sin x = -\,2\sin^2 x + \sin x + 2$.

(b) L'équation $2\cos^2 x + \sin x = 2$ équivaut à $-\,2\sin^2 x + \sin x = 0$, c'est-à-dire :

Sin x =0 ou $\sin x = ½$, ce qui pour x dans l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$, donne 0, π, $\pi/6$ et $5\pi/6$.

(4 pts)