Devoir à la maison n°6
Corrigé

Exercice 79 p. 214 :

1. (a) Le triangle AHM est rectangle en H donc $\cos\hat{a} = \frac{AH}{AM}$.
   (b) M est un point du demi-cercle de diamètre $[AC]$ donc AMC est un triangle rectangle en M. On peut alors écrire : $\cos\hat{a} = \frac{AM}{AC}$.
   (c) Comme $B \in [AH]$, on a $AH = AB + BH = 1 + BH$.
   Le triangle BHM est rectangle en H et donc : $BH = BM\cos\hat{b} = \cos\hat{b}$ puisque $BM = 1$.
   Ainsi, $AH = 1 + \cos\hat{b}$.

   On constate alors que $\cos^2\hat{a} = \frac{AH}{AM} \times \frac{AM}{AC} = \frac{AH}{AC} = \frac{1+\cos\hat{b}}{2}$.
2. Le triangle ABM est isocèle en B. Ainsi, l'angle $\widehat{ABM}$ mesure $180^\circ - 2\hat{a}$. Mais par ailleurs, cet angle mesure $180^\circ - \hat{b}$. Ainsi,
$$\hat{b} = 2\,\hat{a}$$
   On en déduit que
$$\cos^2\hat{a} = \frac{1+\cos 2\,\hat{a}}{2}$$
3. (a) Comme $30 = 2 \times 15$, il vient :
$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$
   (b) **Méthode :** $\cos 15^\circ$ et $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ étant positifs, il suffit de prouver que leurs carrés sont égaux pour prouver que ces nombres sont égaux.

   On sait que $\cos^2 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

   Calculons maintenant $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$:
$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{6}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$
   Ainsi, $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 88 p.215 :

Sachant que $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, on peut écrire que $\cos^2 15° = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{16-2\sqrt{12}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Comme dans l'exercice précédent, on remarque que $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{6+\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{6}+2}{16} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Ainsi, les nombres **positifs** $\cos 15°$ et $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ont le même carré : ils sont donc égaux.