

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UN CERCLE

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 Le cercle unité

On appelle **cercle unité** le cercle Γ de centre O et de rayon 1.

1. Soit $\mathcal{C} = \{M(\cos t; \sin t); t \in \mathbb{R}\}$.
Prouver que $\mathcal{C} \subset \Gamma$.
2. Réciproquement, soit $M \in \Gamma$ et t une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. Exprimer les coordonnées de M en fonction de t . Qu'en déduit pour les ensembles \mathcal{C} et Γ ?

Conclusion : On a prouvé l'équivalence suivante :

$$M(x; y) \in \Gamma \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad x = \cos t \text{ et } y = \sin t$$

En terme d'affixe dans le plan complexe :

$$M(z) \in \Gamma \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad z = \dots\dots\dots$$

Remarque : $M(z) \in \Gamma$ si, et seulement si, $|z| = \dots\dots\dots$

On a ainsi prouvé qu'un nombre complexe est de module 1 si, et seulement si, il existe un réel t tel que $z = e^{it}$.

2 Cercle quelconque

Soit $I(a; b)$ un point du plan, $(a, b \in \mathbb{R})$, et r un réel strictement positif : on note $\mathcal{C}(I; r)$ le cercle de centre I et de rayon r . Soit $M(x; y)$ un point du plan.

1. Prouver que l'équivalence suivante est vraie :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}(I; r) \iff N\left(\frac{x-a}{r}; \frac{y-b}{r}\right) \in \Gamma$$

2. En déduire que :

$$M(x; y) \in \mathcal{C}(I; r) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad x = a + r \cos t \text{ et } y = b + r \sin t$$

Ecrire cette équivalence en utilisant l'affixe $z = x + yi$ du point M et l'affixe $\omega = a + bi$ du point I .

Définition : Le système

$$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une **représentation paramétrique** du cercle \mathcal{C} .

t est le **paramètre**.

Remarque : Cette équation s'écrit aussi en terme d'affixe, comme ci-dessus.

EXERCICE 1. Soit dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3 + i| = 5$.

Quelle est la nature de cette ensemble ?

En donner une représentation paramétrique sous forme complexe.