corrigé partiel du TD 1

I Exercices

E Exercice: Explosion combinatoire

Données

$n \in I\!N$ est le nombre de patients.

$d \in (I\!N^n)^n$ est la matrice des durées de parcours. $d_{i,j}$ est le temps nécessaire pour aller du patient i au patient j.

Modèle non linéaire

La variable de décision est le vecteur $p \in \{1, 2, \dots, n\}^n$. Isabelle visite dans l'ordre les patients p_1, p_2, $\dots$ p_n.

Les contraintes sont :

$\forall i \quad 1 \leq p_i \leq n$
$\forall i \quad p_i \in \mathbb{Z}$
$\forall i \quad \forall j \quad i < j \implies p_i \neq p_j$

L'objectif est la durée totale des déplacements effectués, qu'il faut mimimiser:

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n-1} d_{p_i, p_{i+1}}$$

Modèle linéaire avec $O(n^2)$ variables binaires et $O(n^3)$ contraintes

Les variables de décision sont les deux matrices binaires : $s, t \in (\{0, 1\}^n)^n$.
$s_{i,j} = 1$ ssi le patient j est visité juste près le patient i.
$t_{i,j} = 1$ ssi le patient j est visité près le patient i.
La diagonale de ces deux matrices n'est pas définie. Il n'y a que $2n(n-1)$ variables binaires. Dans ce qui suit on omet les contraintes et les termes des sommes contenant $s_{i,i}$ ou $t_{i,i}$. Par exemple $\sum_i \sum_j s_{i,j}$ est une somme de $n(n-1)$ termes (et non pas n^2 termes). De même $\quad \forall i \quad \forall j \quad t_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad$ représente seulement $n(n-1)$ contraintes.

Les contraintes sont :

$\forall i \quad \forall j \quad 0 \leq s_{i,j} \leq 1$
$\forall i \quad \forall j \quad s_{i,j} \in \mathbb{Z}$
$\forall i \quad \forall j \quad 0 \leq t_{i,j} \leq 1$
$\forall i \quad \forall j \quad t_{i,j} \in \mathbb{Z}$
$\forall i \quad \sum_j s_{i,j} \leq 1$ On part de chez le patient i au plus une fois.
$\forall i \quad \sum_j s_{j,i} \leq 1$ On arrive chez le patient i au plus une fois.
$\sum_i \sum_j s_{i,j} = n - 1$ Il y a $n - 1$ déplacements entre les patients.
$\forall i \quad \forall j \quad s_{i,j} \leq t_{i,j}$ On ne recule pas.
$\forall i \quad \forall j \quad t_{i,j} + t_{j,i} = 1$ i est visité ou bien avant, ou bien après j.
$\forall i \quad \forall j \quad \forall k \quad s_{i,j} + s_{j,k} + s_{k,i} \leq 2.$ L'ordre est transitif: $x < y$ et $y < z \implies x < z$.

Sans les contraintes faisant intervenir les $t_{i,j}$, les déplacements choisis pourraient former un chemin accompagné d'une ou plusieurs boucles. Les $t_{i,j}$ définissent un ordre total sur les patients et les déplacements s'effectuent en suivant cet ordre. Il n'y a donc pas de boucle, car on ne revient jamais en arrière.

L'objectif est: $f(s,t) = \sum_i \sum_j s_{i,j} d_{i,j}$

On peut ne garder qu'une moitié de la matrice t d'un coté de la diagonale. Par exemple on garde les $t_{i,j}$ avec $i < j$ et on remplace partout $t_{j,i}$ par $1 - t_{i,j}$. De la sorte il n'y a plus que $3n(n-1)/2$ variables binaires au lieu de $2n(n-1)$.

La transitivité de l'ordre demande $n(n-1)(n-2)/3 = O(n^3)$ contraintes. Le nombre des autres contraintes est $O(n^2)$. La modélisation linéaire du voyageur de commerce proposée sur coursenligne utilise 2^n contraintes. $n^3 = o(2^n)$.

Modèle linéaire plus compact

Les variables de décision sont la matrice binaire : $s \in (\{0,1\}^n)^n$ et le vecteur $u \in \{1, 2, \ldots, n\}^n$.

$s_{i,j} = 1$ ssi le patient j est visité juste près le patient i.

u_i est le rang de visite du patient i.

La diagonale de la matrice s est nulle.

Les contraintes sont :

$\forall i \quad \forall j \quad 0 \leq s_{i,j} \leq 1$

$\forall i \quad \forall j \quad s_{i,j} \in \mathbb{Z}$

$\forall i \quad \sum_j s_{i,j} \leq 1$ On part de chez le patient i au plus une fois.

$\forall i \quad \sum_j s_{j,i} \leq 1$ On arrive chez le patient i au plus une fois.

$\sum_i \sum_j s_{i,j} = n - 1$ Il y a $n-1$ déplacements entre les patients.

$\forall i \quad \forall j \quad u_i + n s_{i,j} \leq n - 1 + u_j$ Si on va de i chez j alors $u_i + 1 \leq u_j$.

$\forall i \quad 1 \leq u_i \leq n$

$\forall i \quad u_i \in \mathbb{Z}$

L'objectif est: $f(s,t) = \sum_i \sum_j s_{i,j} d_{i,j}$