PSI* 07/08 -Devoir 6- Surveillé - 3h - Le 10/11/07

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
L'usage des calculatrices est interdit.

PROBLEME

L'objectif du problème est d'étudier certains endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes. On considère les matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}$. On note I la matrice unité de $\mathcal{M}$.
Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}$, on note $\Phi_{A,B}$ l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{M},\ \Phi_{A,B}(X) = A.X.B$$

.

Question préliminaire

Démontrer que pour tout (A, B) de $\mathcal{M}^2$: $\Phi_{A,B} \in \mathcal{L}$.
Dans tout ce problème, on note désormais $A \circ B$ la matrice de $\Phi_{A,B}$ relativement à la base (E_1, E_2, E_3, E_4) de $\mathcal{M}$.

Première Partie

Dans cette seule partie, on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \circ B$.
2. Calculer $\det(A \circ B)$.
3. Calculer $(A \circ B)^{-1}$.
4. Si possible, diagonaliser A, B et $A \circ B$.

Deuxième Partie

On revient au cas général où A et B sont quelconques dans $\mathcal{M}$.

1. a) Démontrer que si P, et Q sont dans $\mathcal{M}$, on a : $(P \circ Q)(A \circ B) = (P.A) \circ (B.Q)$.
   b) Démontrer que si P et Q sont des éléments inversibles dans $\mathcal{M}$, $(P \circ Q)$ est inversible et donner $(P \circ Q)^{-1}$.
   c) Déterminer , sous forme de blocs, la matrice $A \circ B$.
   d) Si A et B sont diagonalisables, démontrer que $A \circ B$ l'est aussi. Quel est le spectre de $A \circ B$?
2. Calculer $\det(A \circ I)$, $\det(I \circ A)$ et $\det(A \circ B)$ en fonction de $\det A$ et $\det B$.

Troisième Partie

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k$, des matrices non nulles de $\mathcal{M}$. On leur associe l'application H de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}$, $H(X) = \sum_{i=1}^{k} A_i.X.B_i$.

1. Démontrer que H est dans $\mathcal{L}$. On note $\hat{H}$ sa matrice dans la base (E_1, E_2, E_3, E_4) de $\mathcal{M}$.
   On pose $B_j = \begin{pmatrix} b_1^{(j)} & b_3^{(j)} \\ b_2^{(j)} & b_4^{(j)} \end{pmatrix}$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$ et $\hat{H} = \begin{pmatrix} U_1 & U_3 \\ U_2 & U_4 \end{pmatrix}$. Exprimer les matrices U_i en fonction des matrices A_j et des coefficients des B_j.

2. On suppose que les matrices A_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ constituent une famille libre dans $\mathcal{M}$ et que les matrices $B_1, B_2, \ldots, B_k, B'_1, B'_2, \ldots, B'_k$ de $\mathcal{M}$ sont telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M},\ \sum_{j=1}^{k} A_j X B_j = \sum_{j=1}^{k} A_j X B'_j$$

Démontrer alors : $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$, $B_j = B'_j$.

Peut-on déduire des propriétés analogues pour les matrices A_j et A'_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ lorsque les matrices B_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ constituent une famille libre de $\mathcal{M}$?

3. Soit L un élément de $\mathcal{L}$, de matrice $\hat{L} = \begin{pmatrix} V_1 & V_3 \\ V_2 & V_4 \end{pmatrix}$ relativement à la base (E_1, E_2, E_3, E_4) de $\mathcal{M}$. Démontrer qu'il existe un entier β compris entre 1 et 4 et des matrices $C_1, \ldots, C_\beta, D_1, \ldots, D_\beta$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M},\ L(X) = \sum_{j=1}^{\beta} C_j X D_j$$

On dit alors que l'on a défini une décomposition de L de longueur β, on pourra remarquer que cela signifie de manière équivalente :

$$\hat{L} = \sum_{j=1}^{\beta} C_j \circ D_j$$

4. a) Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{M}$ qui à toute matrice X associe ${}^tX$. Déterminer la matrice $\hat{T}$ de T relativement à la base (E_1, E_2, E_3, E_4) de $\mathcal{M}$.

   b) Démontrer que la longueur de toute décomposition de T est 4.

   c) Déterminer des matrices D_1, D_2, D_3, D_4 telles que : $\hat{T} = \sum\limits_{i=1}^{4} E_i \circ D_i$.

Quatrième Partie

Dans cette partie, on désigne par Γ un élément de $\mathcal{L}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Γ est bijective.

(ii) $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}^2$, $\Gamma(X.Y) = \Gamma(X).\Gamma(Y)$

1. Démontrer qu'un endomorphisme d'un **C**-espace vectoriel de dimension finie non nulle ayant même matrice dans toute base est une homothétie (on s'interessera à une valeur propre de cet endomorphisme et à un vecteur propre associé).

2. Démontrer que si $\Gamma(X) = I$ alors $X = I$ et que pour tout X de $\mathcal{M}$, $\Gamma(X)$ est inversible si, et seulement si, X est inversible.

3. On considère une décomposition de Γ de longueur minimale β : $\forall X \in \mathcal{M}$, $\Gamma(X) = \sum\limits_{j=1}^{\beta} A_j X B_j$.

   a) Démontrer :

   $$\forall j \in \{1, \ldots, \beta\}, \forall Y \in \mathcal{M},\ \begin{cases} Y B_j = B_j \Gamma(Y) \\ A_j Y = \Gamma(Y) A_j \end{cases}$$

   b) Calculer pour toute matrice inversible Y, le produit : $\Gamma(Y^{-1}).A_i B_j \Gamma(Y)$ pour tout i et j entiers entre 1 et β.

   Démontrer que toutes les matrices $A_i.B_j$ sont colinéaires à I. Peuvent -elles être toutes nulles ?

   En déduire la valeur de β et les Γ possibles.

4. Quelles sont toutes les applications Γ vérifiant (i) et (ii) ?

FIN (D'après ENSIETA 96-Partiel)