QCM

**Calcul à l'aide d'un polynôme de la somme $\sum_{k=1}^{p}\cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ ; application au calcul de** $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ (méthode de Papadimitriou, 1973).

$n$ désigne un entier naturel impair (= $2p + 1$).

1) Soit $\theta$ un réel tel que $\sin\theta \neq 0$. En écrivant que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sin^n\theta(..............)^n$, on obtient que :

| | | vrai | faux |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sin n\theta = \sin^n\theta\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cot^{n-k}\theta$ | | |
| 1 | $\sin n\theta = \sin^n\theta\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k+1}\cot^{2p-2k}\theta$ | | |
| 1 | $\sin n\theta = \sin^n\theta\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}i^k\binom{n}{k}\cot^{n-k}\theta\right)$ | | |

On en déduit l'existence d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sin n\theta = \sin^n\theta\, P_n\left(\cot^2\theta\right)$.

1 2) Compléter : $P_n = \sum_{k=0}^{p}$.................................................................

3) Entourer la bonne réponse :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Le degré de $P_n$ est | $n$ | $p$ |
| 1 | Son coefficient dominant est : | $n$ | 1 |
| 1 | Le coefficient précédent le coefficient dominant est : | $-\binom{n}{3}$ | $-\binom{n}{2}$ |

1 4) La somme des racines de $P_n$ est donc $\sigma_1 =$

2 5) Leur produit est :

6) Entourer la bonne réponse :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Les racines de $P_n$ sont : | Les $\cot^2\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \leq k \leq n$ | Les $\cot^2\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \leq k \leq p$ | Les $\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \leq k \leq p$ |

7) Ecrire la décomposition en produit de facteurs irréductibles réels de $P_n$

1 $P_n =$ ...............................................

8) Entourer la bonne réponse :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\sum_{k=1}^{p}\cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est égal à : | $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ | $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$ | $\frac{(n-1)(n-2)}{12}$ | $\frac{n(n-2)}{9}$ |

9) Entourer les deux bonnes réponses :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *2* | $\sum_{k=1}^{p}\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ est égal à : | $p+\sum_{k=1}^{p}\cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ | $1+\sum_{k=1}^{p}\cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ | $\dfrac{(n+1)(n-1)}{6}$ | $\dfrac{(n-1)(n+1)(n-3)}{6}$ |

*1* Et un équivalent simple quand $n \to +\infty$ en est :

10) Pour $x \in ]0,\frac{\pi}{2}[$, on a l'inégalité : $\cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$ ; de quelle inégalité portant sur $x, \sin x, \tan x$ provient-elle ?

*1* Réponse :

11) Quelles valeurs doit-on donner à *x* pour déduire de 10) l'inégalité :

$$\frac{\pi^2}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{n^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad ?$$

*1*

Réponse : on applique 10) pour $x =$

*2* 12) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ ; $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| *1* | 13) Le coefficient de $X^{p-2}$ dans $P_n$ est : | $\binom{n}{3}$ | $\binom{n}{5}$ |
| *1* | 14) La somme des produits deux à deux des racines de $P_n$ est donc $\sigma_2 =$ | $\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$ | $\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$ |

15) Ecrire la somme des carrés des racines de $P_n$ en fonction de $\sigma_1, \sigma_2$.

*1* Réponse :

On trouve que cette somme est égale à $\dfrac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-13)}{90}$

16) De quelle égalité portant sur $\dfrac{1}{\sin^4\theta}$ déduit-on que :

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = p + 2\sum_{k=1}^{p}\cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{k=1}^{p}\cot^4\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad ?$$

*1* De $\dfrac{1}{\sin^4\theta} =$ ......................................................

*1* 17) Un équivalent simple quand $n \to +\infty$ de $\sum_{k=1}^{p}\dfrac{1}{\sin^4\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ est :

17) Ecrire un encadrement de $\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^4}$ similaire à celui de 11).

*1* .............................................................................................................................................

*2* 18) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$ : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} =$