Problème rédigé par R. FERREOL ferreol@mathcurve.com

Etude du billard circulaire.

1) On considère dans le plan deux points A et B et une droite (D) qui ne les contient pas.
On demande de construire le point d'impact M sur la droite (D) d'une boule de billard lancée de A et aboutissant en B.

Vous venez de résoudre le problème du billard rectiligne. Le problème du billard circulaire (ou problème d'Al Hazen, mathématicien arabe du 11ème siècle) est exactement le même problème, en remplaçant la droite (D) par un cercle (C).

Pour simplifier, on suppose que le cercle (C) est le cercle trigonométrique, et l'on désigne par a et b les affixes respectives de A et B (qui ne sont pas forcément intérieurs au cercle).

Normalement, un point M est un point d'impact d'impact d'une boule de billard allant de A en B ssi la bissectrice *intérieure* de l'angle AMB est perpendiculaire à la tangente au bord du billard. Pour que les équations soient plus simples, nous allons définir un point d'impact *généralisé* comme un point M tel que *l'une des deux* bissectrices de l'angle AMB est perpendiculaire à cette tangente.

2) Montrer qu'un point M d'affixe z du cercle (C) est un point d'impact généralisé d'une boule de billard allant de A en B si et seulement si le complexe $\frac{(a-z)(b-z)}{z^2}$ est réel.

3) En déduire qu'un point M d'affixe z du plan est un point d'impact généralisé d'une boule de billard allant de A en B si et seulement si $z\overline{z}=1$ et $\overline{ab}z^4-(\overline{a}+\overline{b})z^3+(a+b)z-ab=0$ (1).

4) Etudier le cas où l'un des points est en O. On suppose dorénavant ce cas exclu.

5) Dire pourquoi on ne restreint pas la généralité si l'on suppose que l'axe des abscisses est la bissectrice intérieure de l'angle AOB, ce que nous supposons dorénavant. Montrer qu'alors ab est réel et que l'équation (1) peut alors se mettre sous la forme $z^4-\overline{c}z^3+cz-1=0$ où l'on exprimera c en fonction de a et b.

6) Résoudre le problème lorsque OA = OB.

7) Résoudre le problème de manière approchée à l'aide de la calculatrice ou de Maple (fsolve) lorsque $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et tracer la figure correspondante.

8) Idem pour $A(4,4)$ et $B(2,-2)$.

Rem : on peut démontrer, en utilisant l'équation (1), que les points d'impact ne sont pas constructibles à la règle et au compas (sauf cas particuliers).