

PROBLÈME SUR LA DENSITÉ D'UN ENSEMBLE DE NATURELS

ATTENTION : dans ce problème, “entier” signifiera “entier ≥ 1 ”, et “ensemble” : “ensemble d’entiers”.

I) Pour un ensemble A et un entier n , on pose :

$$v_n(A) = |A \cap [1, n]| = \text{nombre d'éléments de } A \text{ entre } 1 \text{ et } n.$$

$$\delta_n(A) = \frac{v_n(A)}{n} = \text{proportion d'entiers appartenant à } A \text{ parmi ceux de } 1 \text{ à } n.$$

Par définition, la limite $\delta(A)$ de la suite $(\delta_n(A))_{n \geq 1}$, si elle existe, est la *densité* de A (sous-entendu : dans \mathbb{N}^*), ou la *fréquence* des éléments de A parmi les entiers, ou encore la *probabilité* qu'un entier soit dans A .

1) Déterminer la densité, si elle existe,

- a) de \mathbb{N}^* .
- b) d'un ensemble fini.
- c) des entiers pairs.
- d) des carrés.
- e) de $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [2^{2k}, 2^{2k+1}]$.
- f) des entiers qui en système décimal, ne comportent pas de 0.

2) Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, avec $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, un ensemble infini.

- a) α) Que peut-on dire de la suite (a_n) ? (justifier).
- β) Que vaut l'entier $v_{a_n}(A)$?
- γ) Montrer que si A possède une densité δ , alors δ est la limite de la suite $\left(\frac{n}{a_n}\right)$.
- b) α) Que peut-on dire de la suite $(v_n(A))$? (justifier).
- β) Montrer que $a_{v_n(A)} \leq n < a_{v_n(A)+1}$.
- γ) On suppose (réciproque de a) γ) que $\left(\frac{n}{a_n}\right)$ possède une limite δ ;
montrer que δ est la densité de A .

c) On en déduit donc que si a_n (qui est $\geq n$) est équivalent à αn , la densité de A est $\frac{1}{\alpha}$, et que si $a_n \gg n$, cette densité est nulle.

Déterminer par exemple la densité de l'ensemble des entiers congrus à un entier donné modulo un autre entier donné, de $A = \{[n\alpha] / n \in \mathbb{N}^*\}$ où α est un réel ≥ 1 .
([x] désigne la partie entière de x).

II 1) On se donne deux ensembles A et B ; montrer que si trois ensembles parmi A , B , $A \cup B$ et $A \cap B$ ont une densité, alors le quatrième également, et qu'alors

$\delta(A) + \delta(B) = \delta(A \cup B) + \delta(A \cap B)$. Que dire de deux ensembles disjoints ayant une densité ?

2) En déduire l'existence et la valeur de la densité de ${}^c A (= \mathbb{N}^* \setminus A)$, si A possède une densité.

3) Un ensemble *négligeable* est un ensemble de densité nulle. Que peut-on dire d'une partie d'un ensemble négligeable ? De la réunion d'un ensemble négligeable et d'un ensemble de densité δ ?

III Soit $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ un ensemble infini ($b_1 < b_2 < b_3 < \dots$) ; on appelle *densité relative* d'un ensemble A dans B (ou *fréquence* des éléments de A parmi ceux de B , ou encore *probabilité* qu'un élément de A soit dans B), la limite, si elle existe, de

$$\delta_n(A/B) = \frac{|A \cap \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}|}{n} \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini. Notation : } \delta(A/B).$$

(A/B se lit : "A sachant B")

1) Lemme : soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite numérique et $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers vérifiant $p_n \leq p_{n+1} \leq p_n + 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim p_n = +\infty$; montrer que (u_n) est convergente si et seulement si (u_{p_n}) l'est.

2) Montrer que si A et B ont une densité, B non négligeable, alors la densité relative

de A dans B existe et vaut $\frac{\delta(A \cap B)}{\delta(B)}$.

Indication : montrer que $\delta_n(A \cap B) = \delta_{v_n(A)}(A/B) \cdot \delta_n(B)$.

\cap

3) On dit que les événements "être dans A " et "être dans B " sont *indépendants* (ou plus simplement que A et B sont indépendants) si A, B ont une densité et $\delta(A \cap B) = \delta(A) \cdot \delta(B)$.

a) Vérifier qu'un ensemble négligeable est indépendant de tout ensemble ayant une densité.

b) Montrer que si A et B ont une densité et $\delta(A) \cdot \delta(B) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $\delta(A/B) = \delta(A)$; donner la CNS symétrique de la précédente.

4) Soient p et q deux entiers ; étudier l'indépendance des événements : "être multiple de p " et "être multiple de q ".

5) Soient A et B deux ensembles infinis. On écrit :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \text{ avec } a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}, \text{ avec } b_1 < b_2 < b_3 < \dots$$

Et l'on note A_B la partie de A : $\{a_{b_1}, a_{b_2}, a_{b_3}, \dots\}$.

Montrer que si A et B ont des densités, A_B aussi et $\delta(A_B) = \delta(A) \cdot \delta(B)$.

Indication : traiter à part le cas A négligeable, et si $\delta(A) \neq 0$, montrer que $\delta(A_B / A) = \delta(B)$ ou bien utiliser I 2).

IV La densité des nombres premiers.

Soit $\mathbb{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots\}$ où $(p_n)_{n \geq 1}$ est la suite strictement croissante des nombres premiers.

Désignons par A_k l'ensemble des multiples de p_k .

1) Montrer que la densité de ${}^c A_1 \cap \dots \cap {}^c A_k$ est égale à

$$P_k = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

2) ** Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = 0$.

3) En remarquant que A_k contient tous les nombres premiers à partir de p_{k+1} , montrer que $\overline{\lim} \delta_n(\mathbb{P}) \leq P_k$.

4) En déduire que \mathbb{P} est de densité nulle et que donc $p_n \gg n$.

Il a été démontré plus précisément en 1896 par Hadamard et de La Vallée Poussin que $\nu_n(\mathbb{P}) \sim \frac{n}{\ln n}$, ce qui redémontre évidemment que \mathbb{P} est de densité nulle.

5) En déduire un équivalent simple de p_n quand n tend vers l'infini.

IV UNE APPLICATION INATTENDUE

1) Soient α et β deux réels > 1 ; prouver l'équivalence des énoncés :

(1) α et β sont irrationnels et $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

(2) \mathbb{N}^* est la réunion disjointe de $A = \{[n\alpha] / n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{[n\beta] / n \in \mathbb{N}^*\}$.

Indications : pour (1) \Rightarrow (2), raisonner par l'absurde en supposant successivement : $A \cup B \neq \mathbb{N}^*$ puis $A \cap B \neq \emptyset$.

pour (2) \Rightarrow (1), raisonner par l'absurde pour prouver que α et β sont irrationnels et utiliser les densités de A et B pour montrer $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

2) Pour $\alpha = \varphi$ (nombre d'or), déterminer par exemple :

$$\{[n\alpha] / n \in \mathbb{N}^*\} \cap [1, 20] \text{ et } \{[n\beta] / n \in \mathbb{N}^*\} \cap [1, 20]$$

Quelle propriété semble avoir la suite $([n\varphi])$?