PROBLÈME SUR LA DENSITÉ D'UN ENSEMBLE DE NATURELS

ATTENTION : dans ce problème, "entier" signifiera "entier ≥ 1", et "ensemble" : "ensemble d'entiers".

I) Pour un ensemble A et un entier n, on pose :

$\nu_n(A) = |A \cap [1, n]| =$ nombre d'éléments de A entre 1 et n.

$\delta_n(A) = \dfrac{\nu_n(A)}{n} =$ proportion d'entiers appartenant à A parmi ceux de 1 à n.

Par définition, la limite δ(A) de la suite $(\delta_n(A))_{n\geq 1}$, si elle existe, est la *densité* de A (sous-entendu : dans $\mathbb{N}^*$), ou la *fréquence* des éléments de A parmi les entiers, ou encore la *probabilité* qu'un entier soit dans A.

1) Déterminer la densité, si elle existe,

a) de $\mathbb{N}^*$.
b) d'un ensemble fini.
c) des entiers pairs.
d) des carrés.
e) de A $= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left]2^{2k}, 2^{2k+1}\right]$.
f) des entiers qui en système décimal, ne comportent pas de 0.

2) Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$, avec $a_1 < a_2 < a_3 < ...$, un ensemble infini.

a) α) Que peut-on dire de la suite (a_n) ? (justifier).
β) Que vaut l'entier $\nu_{a_n}(A)$?
γ) Montrer que si A possède une densité δ, alors δ est la limite de la suite $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$.

b) α) Que peut-on dire de la suite ($\nu_n(A)$) ? (justifier).
β) Montrer que $a_{\nu_n(A)} \leq n < a_{\nu_n(A)+1}$.
γ) On suppose (réciproque de a) γ)) que $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$ possède une limite δ ; montrer que δ est la densité de A.

c) On en déduit donc que si a_n (qui est $\geq n$) est équivalent à αn, la densité de A est $\dfrac{1}{\alpha}$, et que si a_n>>n, cette densité est nulle.

Déterminer par exemple la densité de l'ensemble des entiers congrus à un entier donné modulo un autre entier donné, de $A = \{[n\alpha] / n \in \mathbb{N}^*\}$ où α est un réel ≥ 1 .
([x] désigne la partie entière de x).

II 1) On se donne deux ensembles A et B ; montrer que si trois ensembles parmi A, B, $A \cup B$ et A $\cap$ B ont une densité, alors le quatrième également, et qu'alors

$\delta(A)+\delta(B)=\delta(A\cup B)+\delta(A\cap B)$. Que dire de deux ensembles disjoints ayant une densité ?

2) En déduire l'existence et la valeur de la densité de ${}^{c}A$ ($=\mathbb{N}^{*}\setminus A$), si A possède une densité.

3) Un ensemble *négligeable* est un ensemble de densité nulle.
Que peut-on dire d'une partie d'un ensemble négligeable ? De la réunion d'un ensemble négligeable et d'un ensemble de densité δ ?

III Soit $B=\{b_1,b_2,b_3,...\}$ un ensemble infini ($b_1<b_2<b_3<...$) ; on appelle *densité relative* d'un ensemble A dans B (ou *fréquence* des éléments de A parmi ceux de B, ou encore *probabilité* qu'un élément de A soit dans B), la limite, si elle existe, de $\delta_n(A/B)=\dfrac{|A\cap\{b_1,b_2,b_3,...,b_n\}|}{n}$ quand n tend vers l'infini. Notation : $\delta(A/B)$.
(A/B se lit : “A sachant B”)
1) Lemme : soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique et $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers vérifiant $p_n\leq p_{n+1}\leq p_n+1$ pour tout $n\geq 1$ et $\lim p_n=+\infty$; montrer que (u_n) est convergente si et seulement si (u_{p_n}) l'est.

2) Montrer que si A et B ont une densité, B non négligeable, alors la densité relative de A dans B existe et vaut $\dfrac{\delta(A\cap B)}{\delta(B)}$.

Indication : montrer que $\delta_n(A\cap B)=\delta_{\nu_n(A)}(A/B).\delta_n(B)$.

$\cap$

3) On dit que les événements “être dans A “ et “être dans B” sont *indépendants* (ou plus simplement que A et B sont indépendants) si A, B ont une densité et $\delta(A\cap B)=\delta(A).\delta(B)$.

a) Vérifier qu'un ensemble négligeable est indépendant de tout ensemble ayant une densité.

b) Montrer que si A et B ont une densité et $\delta(A).\delta(B)\neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $\delta(A/B)=\delta(A)$; donner la CNS symétrique de la précédente.

4) Soient p et q deux entiers ; étudier l'indépendance des événements : “être multiple de p” et “être multiple de q”.

5) Soient A et B deux ensembles infinis. On écrit :
$A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$, avec $a_1<a_2<a_3<...$
$B=\{b_1,b_2,b_3,...\}$, avec $b_1<b_2<b_3<...$
Et l'on note A_B la partie de A : $\{a_{b_1},a_{b_2},a_{b_3},...\}$.
Montrer que si A et B ont des densités, A_B aussi et $\delta(A_B)=\delta(A).\delta(B)$.

Indication : traiter à part le cas A négligeable, et si $\delta(A) \neq 0$, montrer que $\delta(A_B / A) = \delta(B)$ ou bien utiliser I 2).

IV La densité des nombres premiers.

Soit $\mathbb{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...\}$ où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite strictement croissante des nombres premiers.

Désignons par A_k l'ensemble des multiples de p_k.

1) Montrer que la densité de ${}^cA_1 \cap ... \cap {}^cA_k$ est égale à $P_k = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

2) ** Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k = 0$.

3) En remarquant que A_k contient tous les nombres premiers à partir de p_{k+1}, montrer que $\overline{\lim}\,\delta_n(\mathbb{P}) \leq P_k$.

4) En déduire que $\mathbb{P}$ est de densité nulle et que donc $p_n >> n$.

Il a été démontré plus précisément en 1896 par Hadamard et de La Vallée Poussin que $\nu_n(\mathbb{P}) \sim \frac{n}{\ln n}$, ce qui redémontre évidemment que $\mathbb{P}$ est de densité nulle.

5) En déduire un équivalent simple de p_n quand n tend vers l'infini.

IV UNE APPLICATION INATTENDUE

1) Soient α et β deux réels > 1 ; prouver l'équivalence des énoncés :

(1) α et β sont irrationnels et $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

(2) $\mathbb{N}^*$ est la réunion disjointe de $A = \{[n\alpha] / n \in \mathbb{N}^*\}$ *et* $B = \{[n\beta] / n \in \mathbb{N}^*\}$.

Indications : pour (1) => (2), raisonner par l'absurde en supposant successivement : $A \cup B \neq \mathbb{N}^*$ puis $A \cap B \neq \emptyset$.

pour (2) => (1), raisonner par l'absurde pour prouver que α et β sont irrationnels et utiliser les densités de A et B pour montrer $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

2) Pour $\alpha = \varphi$ (nombre d'or), déterminer par exemple :

$$\{[n\alpha] / n \in \mathbb{N}^*\} \cap [1, 20] \text{ et } \{[n\beta] / n \in \mathbb{N}^*\} \cap [1, 20]$$

Quelle propriété semble avoir la suite $([n\varphi])$?