

PROBLEME SUR LES PROJECTIONS DE L'HELICE

R. FERREOL ferreol@mathcurve.com

PRELIMINAIRES

L'espace affine euclidien orienté E , de dimension 3, associé à l'espace vectoriel \vec{E} , est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'axes Ox , Oy , Oz . Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est noté $(\vec{u} | \vec{v})$ et leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

On considère dans E l'hélice circulaire (H) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = ht \end{cases} \quad \text{où } R \text{ et } h \text{ sont deux constantes } > 0.$$

L'objet de ce problème est d'étudier les projections orthogonales et coniques planes de (H).

La partie III est indépendante des deux premières parties.

PARTIE I : Formules de projection orthogonale.

- 1) Soit \vec{n} un vecteur de norme égale à 1, de coordonnées (a, b, c) avec $c \geq 0$ et soit (P) le plan affine passant par O et orthogonal à \vec{n} , associé au plan vectoriel \vec{P} .
Soit p la projection affine orthogonale de E sur le plan (P), et (C) la courbe plane image de (H) par p . Quelle est la nature de la courbe (C) lorsque (P) est le plan xOy ?

Tournez la page S.V.P.

2) On suppose dorénavant que (P) est différent du plan xOy. Comment se traduit cette condition sur les nombres a, b, c ?

3) On désigne par \vec{p} la projection vectorielle associée à p (par conséquent $\vec{p}(\vec{OM}) = O\vec{p}(M)$ pour tout point M de E).

a) Donner une formule exprimant $\vec{p}(\vec{x})$ en fonction de \vec{x} et de \vec{n} , pour tout vecteur \vec{x} de E.

b) En déduire la matrice de \vec{p} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

c) Quelle relation existe-t-il entre les lignes L_1, L_2, L_3 de cette matrice ?

4) a) Calculer $\left\| \vec{p}(\vec{k}) \right\|^2$ en simplifiant l'expression au maximum.

b) On pose $\vec{I} = \frac{\vec{p}(\vec{k})}{\left\| \vec{p}(\vec{k}) \right\|}$ et on définit le vecteur \vec{J} de façon à ce que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$ soit une base

orthonormée *indirecte* de E. Sans utiliser les coordonnées, montrer que \vec{J} est dans l'intersection du plan \vec{P} et du plan engendré par \vec{i} et \vec{j} .

c) Calculer les coordonnées de \vec{J} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5) Soit P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$.

a) Que dire a priori de cette matrice ?

b) Donner son expression générale en fonction de a, b, c.

c) Déduire de **a)** et **b)** les expressions de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de \vec{I}, \vec{J} et \vec{n} , puis celles de $\vec{p}(\vec{i}), \vec{p}(\vec{j}), \vec{p}(\vec{k})$ en fonction de \vec{I} et \vec{J} .

6) Un point M de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se projette par p en N de coordonnées (X, Y) dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) de (P).

Déduire de **5 c)** les formules exprimant X, Y en fonction de x, y et z.

PARTIE II : Étude des projections orthogonales de l'hélice.

1) Soit θ_0 le réel défini modulo 2π par $\cos \theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Quel angle géométrique θ_0 mesure-t-il ?

2) Montrer que des équations paramétriques de la courbe (C) dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) sont données par les formules
$$\begin{cases} X = dht - cR \cos(t - \theta_0) \\ Y = R \sin(t - \theta_0) \end{cases}$$
 où l'on a posé $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- 3) Quelle est la nature de (C) lorsque le plan (P) contient l'axe Oz ?
- 4) Montrer que si l'on fixe le réel c , les diverses courbes (C) sont translatées les unes des autres à l'intérieur du plan (P), rapporté au repère (O, \vec{I}, \vec{J}) .
On ne restreint donc pas la généralité en supposant que dorénavant $\theta_0 = 0$ (donc $b = 0$ et $d = a > 0$).
- 5) a) Montrer que la courbe (C) possède des points singuliers (ou "stationnaires") si et seulement si $ah = cR$.
b) Montrer que cette dernière condition est équivalente au fait que le vecteur \vec{n} soit parallèle à l'une des tangentes à l'hélice (H).
Jusqu'à la fin de la **question 5**), on supposera que $ah = cR$.
c) Calculer a et c en fonction de h et R .
d) Étudier la courbe (C) (Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi/2, \pi/2]$, et étudier les variations).
e) Tracer la courbe (C) pour $R = 3$ et $h = 4$ dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2 + 4\pi$).
- 6) Étudier et tracer la courbe (C) pour $a = c = 1/\sqrt{2}$, $h = 2\sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2 + 4\pi$).
- 7) Étudier et tracer la courbe (C) pour $a = c = 1/\sqrt{2}$, $h = \sqrt{2}$, $R = 2\sqrt{2}$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2 + 4\pi$).

PARTIE III : Étude des projections coniques de l'hélice.

- 1) Soit S un point du plan xOy de coordonnées $(u, v, 0)$. A tout point M de E de coordonnées (x, y, z) avec $z \neq 0$, on fait correspondre le point d'intersection N de la droite (SM) avec le plan (P') d'équation $z = d$, où d est un réel > 0 .
Calculer dans (O', \vec{i}, \vec{j}) où O' est projeté orthogonal de O sur (P') , les coordonnées (X, Y) du point N , en fonction de x, y, z (on pourra utiliser des équations paramétriques de la droite (SM)).
- 2) En déduire des équations paramétriques dans (O', \vec{i}, \vec{j}) de la courbe (C') décrite par le point N quand M décrit l'hélice (H), excepté le point d'ordonnée 0. On posera $k = \frac{dR}{h}$.
- 3) a) Montrer que lorsque S est en O l'équation polaire de (C') dans (O', \vec{i}, \vec{j}) est :
$$\rho = \frac{k}{\theta} .$$

b) Étudier cette courbe (réduction de l'intervalle d'étude, variations et branches infinies) et en donner un tracé pour θ variant de $\frac{\pi}{4}$ à 5π .
- 4) a) Montrer que lorsque $u = -R$ et $v = 0$ l'équation polaire de (C') dans (O'', \vec{i}, \vec{j}) où O'' a pour coordonnées $(-R, 0, d)$ est : $\rho = k \frac{\cos \theta}{\theta} .$

- b)** Étudier cette courbe et en donner un tracé dans le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) pour θ variant de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{2}$.
- 5)**
- a)** Lorsque $u = R$ et $v = 0$, déterminer un repère dans lequel l'équation polaire de (C') soit :
$$\rho = k \frac{\sin \theta}{\theta} .$$
- b)** Étudier cette courbe et en donner un tracé dans le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) pour θ variant de 0 à $\frac{5\pi}{2}$.