PROBLEME SUR LES PROJECTIONS DE L'HELICE

R. FERREOL   ferreol@mathcurve.com

PRELIMINAIRES

L'espace affine euclidien orienté E, de dimension 3, associé à l'espace vectoriel $\vec{E}$, est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'axes Ox, Oy, Oz. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $(\vec{u} \mid \vec{v})$ et leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

On considère dans E l'hélice circulaire (H) d'équations paramétriques :

$$\left|\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{array}\right. \qquad \text{où R et h sont deux constantes} > 0.$$

L'objet de ce problème est d'étudier les projections orthogonales et coniques planes de (H).

La partie III est indépendante des deux premières parties.

PARTIE I : Formules de projection orthogonale.

1) Soit $\vec{n}$ un vecteur de norme égale à 1, de coordonnées (a, b, c) avec $c \geq 0$ et soit (P) le plan affine passant par O et orthogonal à $\vec{n}$, associé au plan vectoriel $\vec{P}$.

Soit p la projection affine orthogonale de E sur le plan (P), et (C) la courbe plane image de (H) par p. Quelle est la nature de la courbe (C) lorsque (P) est le plan xOy ?

Tournez la page S.V.P.

2) On suppose dorénavant que (P) est différent du plan xOy. Comment se traduit cette condition sur les nombres a, b, c ?

3) On désigne par $\vec{p}$ la projection vectorielle associée à p (par conséquent $\vec{p}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O\,p(M)}$ pour tout point M de E).

a) Donner une formule exprimant $\vec{p}(\vec{x})$ en fonction de $\vec{x}$ et de $\vec{n}$, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E.

b) En déduire la matrice de $\vec{p}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

c) Quelle relation existe-t-il entre les lignes L_1, L_2, L_3 de cette matrice ?

4) **a)** Calculer $\left\|\vec{p}(\vec{k})\right\|^2$ en simplifiant l'expression au maximum.

b) On pose $\vec{I} = \dfrac{\vec{p}(\vec{k})}{\left\|\vec{p}(\vec{k})\right\|}$ et on définit le vecteur $\vec{J}$ de façon à ce que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$ soit une base orthonormée *indirecte* de E. Sans utiliser les coordonnées, montrer que $\vec{J}$ est dans l'intersection du plan $\vec{P}$ et du plan engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c) Calculer les coordonnées de $\vec{J}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5) Soit P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$.

a) Que dire a priori de cette matrice ?

b) Donner son expression générale en fonction de a, b, c.

c) Déduire de **a)** et **b)** les expressions de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en fonction de $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{n}$, puis celles de $\vec{p}(\vec{i})$, $\vec{p}(\vec{j})$, $\vec{p}(\vec{k})$ en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$.

6) Un point M de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se projette par p en N de coordonnées (X, Y) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de (P).

Déduire de **5 c)** les formules exprimant X, Y en fonction de x, y et z.

PARTIE II : Étude des projections orthogonales de l'hélice.

1) Soit θ_0 le réel défini modulo 2π par $\cos\theta_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta_0 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Quel angle géométrique θ_0 mesure-t-il ?

2) Montrer que des équations paramétriques de la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ sont données par les formules $\left|\begin{array}{l} X = dht - cR\cos(t-\theta_0) \\ Y = R\sin(t-\theta_0) \end{array}\right.$ où l'on a posé $d = \sqrt{a^2+b^2}$.

3) Quelle est la nature de (C) lorsque le plan (P) contient l'axe Oz ?

4) Montrer que si l'on fixe le réel c, les diverses courbes (C) sont translatées les unes des autres à l'intérieur du plan (P), rapporté au repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.
On ne restreint donc pas la généralité en supposant que dorénavant $\theta_0 = 0$ (donc b = 0 et d = a > 0).

5) **a)** Montrer que la courbe (C) possède des points singuliers (ou "stationnaires") si et seulement si ah = cR.

b) Montrer que cette dernière condition est équivalente au fait que le vecteur $\vec{n}$ soit parallèle à l'une des tangentes à l'hélice (H).
Jusqu'à la fin de la **question 5)**, on supposera que ah = cR.

c) Calculer a et c en fonction de h et R.

d) Étudier la courbe (C) (Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi/2,\ \pi/2]$, et étudier les variations).

e) Tracer la courbe (C) pour R = 3 et h = 4 dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2+4\pi$).

6) Étudier et tracer la courbe (C) pour $a = c = 1/\sqrt{2}$, $h = 2\sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2+4\pi$).

7) Étudier et tracer la courbe (C) pour $a = c = 1/\sqrt{2}$, $h = \sqrt{2}$, $R = 2\sqrt{2}$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2+4\pi$).

PARTIE III : Étude des projections coniques de l'hélice.

1) Soit S un point du plan xOy de coordonnées (u, v, 0). A tout point M de E de coordonnées (x, y, z) avec $z \neq 0$, on fait correspondre le pont d'intersection N de la droite (SM) avec le plan (P') d'équation z = d, où d est un réel > 0.
Calculer dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ où O' est projeté orthogonal de O sur (P'), les coordonnées (X, Y) du point N, en fonction de x, y, z (on pourra utiliser des équations paramétriques de la droite (SM)).

2) En déduire des équations paramétriques dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ de la courbe (C') décrite par le point N quand M décrit l'hélice (H), excepté le point d'ordonnée 0. On posera $k = \frac{dR}{h}$.

3) **a)** Montrer que lorsque S est en O l'équation polaire de (C') dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ est :
$\rho = \frac{k}{\theta}$.

b) Étudier cette courbe (réduction de l'intervalle d'étude, variations et branches infinies) et en donner un tracé pour θ variant de $\frac{\pi}{4}$ à 5π.

4) **a)** Montrer que lorsque u = - R et v = 0 l'équation polaire de (C') dans $(O'', \vec{i}, \vec{j})$ où O'' a pour coordonnées (-R, 0, d) est : $\rho = k\frac{\cos\theta}{\theta}$.

Tournez la page S.V.P.

b) Étudier cette courbe et en donner un tracé dans le repère (O′, $\vec{i}$, $\vec{j}$) pour θ variant de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{2}$).

5) **a)** Lorsque u = R et v = 0, déterminer un repère dans lequel l'équation polaire de (C') soit : $\rho = k\frac{\sin\theta}{\theta}$.

b) Étudier cette courbe et en donner un tracé dans le repère (O′, $\vec{i}$, $\vec{j}$) pour θ variant de 0 à $\frac{5\pi}{2}$).