UNE APPROCHE DES ENSEMBLES DE JULIA ET DE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT
ENONCE NIVEAU SUP

Pour tout complexe c, on note f_c l'application : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to z^2 + c\end{array}\right.$ et (z_n) une suite récurrente associée à f_c $(z_n = f_c(z_{n-1}))$.
Par définition, l'**ensemble de Julia rempli**, noté K_c associé à c est l'ensemble des complexes z_0 tels que la suite (z_n) soit bornée ; si l'on remplace la condition "bornée" par les conditions respectives "convergente" et " constante à partir d'un certain rang", on désignera par K_c' et K_c'' les ensembles correspondants (on remarquera que $K_c'' \subset K_c' \subset K_c$).

1. Etude de cas particuliers.
   a. Déterminer les ensembles K_0et K_0''.
   b. Dans cette question, on considère le cas particulier $c = -2$.
      i. Montrer que $z \in [-2,2] \Leftrightarrow f_{-2}(z) \in [-2,2]$.
      ii. En déduire que $K_{-2}'' \subset [-2,2]$.
      iii. Déterminer K_{-2}'' (on pourra poser $z_0 = 2\cos\theta$).
      iv. Montrer que $K_{-2} \cap]2,+\infty[= \emptyset$; en déduire que K_{-2} est inclus dans le disque fermé $\overline{D}(0,2) = \{z \in C \,/\, |z| \leqslant 2\}$.
      v. Montrer que si $z \notin [-2,2]$, il existe un unique complexe ω de module > 1 tel que $z = \omega + \dfrac{1}{\omega}$; posons $\omega = g(z)$.
      vi. Pour $z_0 \notin [-2,2]$, on pose $\omega_n = f(z_n)$; calculer ω_n en fonction de ω_0 et en déduire l'ensemble K_{-2}.
2. Etude des ensembles de Julia.
   a. Déterminer les valeurs de z_0 telles que la suite (z_n) soit constante ; en déduire que K_c n'est jamais vide.
   b. Montrer que, dans le plan complexe, K_c est symétrique par rapport à O, et que lorsque c est réel, K_c est symétrique par rapport à Ox et Oy.
      i. Montrer que $z \in K_c \Leftrightarrow f_c(z) \in K_c$.
      ii. En déduire que si A est une partie de $\mathbb{C}$ telle que $f_c(A)$ et K_c sont disjoints, alors A et K_c sont eux aussi disjoints.
      iii. En déduire que si pour n_0, $z_{n_0} \in K_c$, alors $z_n \in K_c$ pour tout n.
   c. Soit $\lambda > 0$; montrer que si $|z| \geqslant \dfrac{\lambda}{2} + \sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4} + |c|}$, alors $|f_c(z)| \geqslant \lambda|z|$. En déduire que K_c est inclus dans le disque fermé $\overline{D}(0,R_c)$ avec $R_c = \dfrac{1}{2} + \sqrt{|c| + \dfrac{1}{4}}$ (et qu'il est donc borné).
   d. On pose $\left\{\begin{array}{l}A_0 = \overline{D}(0,R_c) \\ A_{n+1} = f_c^{-1}(A_n)\end{array}\right.$.
      i. Montrer que pour tout n $A_{n+1} \subset A_n$.
      ii. Montrer que $\boxed{K_c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$.

3. Approche de l'ensemble de Mandelbrot.
   L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble $\mathbb{M}$ des complexes c tels que si l'on prend $z_0 = 0$, la suite (z_n) est bornée (autrement dit tels que $0 \in K_c$).
   a. Montrer que $\mathbb{M}$ est borné et symétrique par rapport à Ox.

b. Montrer que les 2 valeurs l_1 et l_2 trouvées dans 2. a. sont aussi les deux valeurs possibles pour une limite éventuelle de la suite (z_n). Calculer $l_1 + l_2$.

c. On suppose $z_0 \in K'_c \backslash K''_c$, c'est-à dire que (z_n) converge vers une limite l mais qu'elle n'est pas constante à partir d'un certain rang.

   i. Montrer que $z_n \neq l$ pour tout n.

   ii. On pose $t_n = \dfrac{z_{n+1} - l}{z_n - l}$

      A. Montrer que $t_n = z_n + l$ et que $t_0 t_1 \ldots t_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

      B. En déduire que $|l| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   iii. En déduire qu'il n'y a qu'une seule valeur possible pour l, c étant donné. On notera cette valeur $l(c)$.

   iv. Déterminer K'_0.

d. Soit $\mathbb{M}_1$ l'ensemble des complexes c tels qu'au moins une suite (z_n) soit convergente sans être constante (autrement dit tels que K'_c et K''_c soient distincts) ; nous venons de montrer que si $c \in \mathbb{M}_1$ et $z_0 \in K'_c \backslash K''_c$, $\lim z_n = l(c)$ avec $l(c)$ solution de $z^2 + c = z$ et $|l(c)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   i. Montrer que $\mathbb{M}_1$ est inclus dans l'intérieur au sens large de la courbe (appelée cardioïde) formée des complexes $\dfrac{e^{i\theta}}{2} - \dfrac{1}{4} e^{2i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

   ii. Dessiner cet ensemble.

e. Blague : démontrer que $\mathbb{M}_1$ est égal à cette cardioïde pleine et qu'il est inclus dans $\mathbb{M}$.