PROBLÈME NIVEAU SUP REDIGE PAR R. FERREOL ferreol@mathcurve.com

LES NOMBRES ET POLYNOMES D'EULER

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$, on pose $S_n^p=\sum_{k=1}^{n}k^p$ et $T_n^p=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^p$.

L'objectif de ce problème est d'étudier les sommes alternées d'entiers T_n^p et des polynômes associés à ces sommes.
Les parties I) et II) sont indépendantes.

I) PRÉLIMINAIRES.

1) a) Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, T_{2n}^1 et T_{2n-1}^1.

1) b) Donner une formule algébrique unique pour T_n^1.

2) Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, T_{2n}^2.

3) a) En écrivant que, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$, $T_{2n}^p=\sum_{k=1}^{n}(2k)^p-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^p$, exprimer T_{2n}^p en fonction des sommes S_n^q pour q variant de 0 à p -1.

3) b) Appliquer cette méthode pour calculer T_{2n}^3, sachant que $S_n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) Déterminer également une relation liant , pour $n\in\mathbb{N}^*$et $p\in\mathbb{N}$, T_{2n}^p à S_n^pet S_{2n}^p.

II) EXPRESSION DE T_n^p A L'AIDE DES POLYNÔMES D'EULER.

1) a) Que dire d'un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X+2) = P(X)$?

1) b) Que dire d'un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X+1) = - P(X)$?

2) a) La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ; on considère l'application $\varphi_n$de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par $\varphi_n(P)=P(X+1)+P(X)$. Montrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire que l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par $\varphi(P)=P(X+1)+P(X)$ est bijective.

3) On pose, pour $p\in\mathbb{N}$, $E_p=\varphi^{-1}(2X^p)$ (appelé polynôme d'Euler d'ordre p) ; calculer E_0, E_1 et E_2.

4) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\,\forall p\in\mathbb{N}\quad T_n^p=\dfrac{1}{2}\left((-1)^n E_p(n+1)-E_p(1)\right)$.

4) b) Calculer T_n^2.

III) ÉTUDE DES NOMBRES ET POLYNÔMES D'EULER.

1) On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $e_p = E_p(0)$ (appelé nombre d'Euler d'ordre p).

Vérifier que pour $p \in \mathbb{N}^*$, e_p est aussi égal à $-E_p(1)$.

2) a) Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi^{-1}(P') = \left(\varphi^{-1}(P)\right)'$.

2) b) En déduire que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $E_p' = pE_{p-1}$.

3) En déduire, en utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, que $\forall p \in \mathbb{N}$ $E_p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k e_k X^{p-k}$.

4) a) En déduire que la suite (e_p) peut être définie par récurrence à l'aide des relations : $e_0 = 1$ et $\forall p \geq 1 \quad e_p = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1} C_p^k e_k \quad (1)$.

4) b) Calculer e_1, e_2, e_3, e_4.

5) a) Déduire de 2) b) une méthode simple pour déterminer E_p connaissant E_{p-1} et e_p. Utiliser cette méthode pour déterminer E_3 et E_4.

5) b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme T_n^4 (factoriser au maximum).

6) Soit (Q_p) une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} (i) \quad Q_0 = 1 \\ (ii) \quad \forall p \geq 1 \quad Q_p' = pQ_{p-1} \\ (iii) \quad \forall p \geq 1 \quad Q_p(1) = -Q_p(0) \end{cases}$$

Montrer que $\forall p \in \mathbb{N} \quad Q_p = E_p$.

Indications :

a) Prouver que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad Q_p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k Q_k(0) X^{p-k}$.

b) Montrer que la suite $(Q_p(0))$ vérifie :

$$Q_0(0) = 1 \text{ et } \forall p \geq 1 \quad Q_p(0) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1} C_p^k Q_k(0) \quad .$$

c) Conclure.

7) a) montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$ $E_p(X) = (-1)^p E_p(1-X)$.

Indication : utiliser la question 6) avec un polynôme Q_p bien choisi.

7) b) Que signifie cette propriété quant à la courbe de la fonction f_p définie par :

$$\begin{cases} f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto E_p(x) \end{cases}$$

7) c) En déduire également la valeur de e_{2p} pour $p \in \mathbb{N}^*$.

IV) ÉTUDE DES FONCTIONS f_p.

1) On suppose que, p étant supérieur ou égal à 1:

$$(H_p)\begin{cases}\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\ f_{4p-1}(x) > 0\\ \forall x \in \left]\frac{1}{2},1\right[\ f_{4p-1}(x) < 0\end{cases}$$

Démontrer que dans ces conditions f_{4p} admet sur]0,1[deux zéros réels et deux seulement (on pourra envisager les signes respectifs possibles de f_{4p} (1/2) et de $f_{4p}(0)$).
En déduire l'allure de la courbe représentative de f_{4p}.

2) Déduire successivement de la question précédente, sous la même hypothèse :
a) le signe de $f_{4p}(x)$ et les variations de f_{4p+1}.
b) le signe de $f_{4p+1}(x)$ et les variations de f_{4p+2}
c) que f_{4p+2} admet sur]0,1[deux zéros et deux seulement.
d) le signe de $f_{4p+2}(x)$, les variations de f_{4p+3} et le signe de $f_{4p+3}(x)$.
On présentera ces résultats sous forme de tableaux.

3) Montrer que l'hypothèse faite en (2) est vraie pour p = 1 et en déduire q'elle est vraie pour toute valeur de p, $p \geq 1$; indiquer sous forme de schémas les différentes allures que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions f_n selon les valeurs de n.

4) Donner le signe de e_{2p} en fonction de p ($\geq$ 1).

CORRIGE DU PROBLÈME SUR LES NOMBRES ET POLYNOMES D'EULER.

I) 1) $T_{2n}^1 = \sum_{k=1}^{n} \left(-(2k-1)+2k\right) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $T_{2n-1}^1 = n - 2n = -n$.

2) $T_{2n}^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(-(2k-1)^2 + 2k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 2n(n+1) - n = n(2n+1)$.

3) a) $T_{2n}^p = \sum_{k=1}^{n} \left((2k)^p - (2k-1)^p\right) = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-q} C_p^q (2k)^q = (-1)^{p+1} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q C_p^q 2^q S_n^q$.
3) b) $T_{2n}^3 = S_n^0 - 2.3S_n^1 + 4.3S_n^2 = n - 3n(n+1) + 2n(n+1)(2n+1) = n^2(4n+3)$.

4) $T_{2n}^p = \sum_{k=1}^{n} (2k)^p - \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^p = 2\sum_{k=1}^{n} (2k)^p - \sum_{k=1}^{2n} k^p = 2^{p+1} S_n^p - S_{2n}^p$.

II) 1) a) Si $P(X+2)=P(X)$, $P(2n)-P(0)=0$ pour tout n, donc $P(X)-P(0)=0$ et P est **constant**.
1) b) Si $P(X+1)=-P(X)$, alors $P(X+2)=P(X)$ et P est constant donc **nul**.

2) a) φ_n est linéaire de noyau réduit à 0 par 1)b), et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.
b) φ est injective, et elle est surjective car les φ_n le sont.

3) $E_0=1$, $E_1=X-\dfrac{1}{2}$ et $E_2=X^2-X$.

4) a) On a : $k^p=\dfrac{1}{2}\left(E_p(k+1)+E_p(k)\right)$, donc :

$$T_n^p=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(E_p(k+1)+E_p(k)\right)=\frac{1}{2}\left((-1)^n E_p(n+1)-E_p(1)\right).$$

4) b) $T_n^2=\dfrac{1}{2}\left((-1)^n((n+1)(n+1-1)\right)=\dfrac{(-1)^n}{2}n(n+1)$.

III) 1) Car $E_p(0)+E_p(1)=2(0)^p=0$.
2) a) Soit $Q=\left(\varphi^{-1}(P)\right)$; alors $\varphi(Q')=Q'(X)+Q'(X+1)=\left(\varphi(Q)\right)'=P'$, donc $\varphi^{-1}(P')=Q'=\left(\varphi^{-1}(P)\right)'$.
2) b) $E_p'=\left(\varphi^{-1}(2X^p)\right)'=\varphi^{-1}(2pX^{p-1})=pE_{p-1}$.

3) D'après 2)b), $E_p^{(p-k)}=\dfrac{p!}{k!}E_k$, donc, en utilisant la formule de Taylor :

$$E_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{E_p^{(p-k)}(0)}{(p-k)!}X^{p-k}=\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{(p-k)!\,k!}E_k(0)\,X^{p-k}=\sum_{k=0}^{p}C_p^k e_k X^{p-k}.$$

4) a) $e_p=-E_p(1)=-\displaystyle\sum_{k=0}^{p}C_p^k e_k=-e_p-\sum_{k=0}^{p-1}C_p^k e_k$, donc $e_p=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}C_p^k e_k$.

4) b) $e_1=-\dfrac{1}{2}$, $e_2=0$, $e_3=\dfrac{1}{4}$, $e_4=0$.

5) a) $E_p=p.\mathrm{prim}(E_{p-1})+e_p$ où $\mathrm{prim}(Q)$ désigne la primitive de Q s'annulant en 0.
$E_3=X^3-\dfrac{3}{2}X^2+\dfrac{1}{4}$, $E_4=X^4-2X^3+X$.
5) b) $T_n^4=\dfrac{(-1)^n}{2}\left((n+1)^4-2(n+1)^3+n+1\right)=\dfrac{(-1)^n}{2}n(n+1)(n^2+n-1)$.
6) a) $\varphi\left((-1)^p E_p(1-X)\right)=(-1)^p(E_p(1-X)+E_p(-X))$

$$=(-1)^p\varphi(E_p(-X))=(-1)^p(-2X)^p=\varphi(E_p)$$

donc $E_p=(-1)^p E_p(1-X)$.

6) b) Cela signifie que cette courbe est symétrique par rapport à la droite $x = 1/2$ pour p pair, et par rapport au point (1/2,0) pour p impair.
6) c) $e_{2p} = 0$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.