

PROBLÈME NIVEAU SUP REDIGÉ PAR R. FERREOL ferreol@mathcurve.com

### LES NOMBRES ET POLYNÔMES D'EULER

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n^p = \sum_{k=1}^n k^p$  et  $T_n^p = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^p$ .

L'objectif de ce problème est d'étudier les sommes alternées d'entiers  $T_n^p$  et des polynômes associés à ces sommes.

Les parties I) et II) sont indépendantes.

#### I) PRÉLIMINAIRES.

1) a) Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_{2n}^1$  et  $T_{2n-1}^1$ .

1) b) Donner une formule algébrique unique pour  $T_n^1$ .

2) Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_{2n}^2$ .

3) a) En écrivant que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ ,  $T_{2n}^p = \sum_{k=1}^n (2k)^p - \sum_{k=1}^n (2k-1)^p$ , exprimer  $T_{2n}^p$  en fonction des sommes  $S_n^q$  pour  $q$  variant de 0 à  $p-1$ .

3) b) Appliquer cette méthode pour calculer  $T_{2n}^3$ , sachant que  $S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

4) Déterminer également une relation liant, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ ,  $T_{2n}^p$  à  $S_n^p$  et  $S_{2n}^p$ .

#### II) EXPRESSION DE $T_n^p$ A L'AIDE DES POLYNÔMES D'EULER.

1) a) Que dire d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(X+2) = P(X)$  ?

1) b) Que dire d'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $P(X+1) = -P(X)$  ?

2) a) La notation  $\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  ; on considère l'application  $\varphi_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans lui-même définie par  $\varphi_n(P) = P(X+1) + P(X)$ . Montrer que  $\varphi_n$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

b) En déduire que l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}[X]$  dans lui-même définie par  $\varphi(P) = P(X+1) + P(X)$  est bijective.

3) On pose, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $E_p = \varphi^{-1}(2X^p)$  (appelé polynôme d'Euler d'ordre  $p$ ) ; calculer  $E_0$ ,  $E_1$  et  $E_2$ .

4) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall p \in \mathbb{N} \quad T_n^p = \frac{1}{2} \left( (-1)^n E_p(n+1) - E_p(1) \right)$ .

4) b) Calculer  $T_n^2$ .

### III) ÉTUDE DES NOMBRES ET POLYNÔMES D'EULER.

1) On pose, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $e_p = E_p(0)$  (appelé nombre d'Euler d'ordre  $p$ ).

Vérifier que pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $e_p$  est aussi égal à  $-E_p(1)$ .

2) a) Démontrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\varphi^{-1}(P') = (\varphi^{-1}(P))'$ .

2) b) En déduire que pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $E'_p = pE_{p-1}$ .

3) En déduire, en utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, que  $\forall p \in \mathbb{N}$

$$E_p = \sum_{k=0}^p C_p^k e_k X^{p-k}.$$

4) a) En déduire que la suite  $(e_p)$  peut être définie par récurrence à l'aide des relations

$$: e_0 = 1 \text{ et } \forall p \geq 1 \quad e_p = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k e_k \quad (1).$$

4) b) Calculer  $e_1, e_2, e_3, e_4$ .

5) a) Déduire de 2) b) une méthode simple pour déterminer  $E_p$  connaissant  $E_{p-1}$  et  $e_p$ . Utiliser cette méthode pour déterminer  $E_3$  et  $E_4$ .

5) b) Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la somme  $T_n^4$  (factoriser au maximum).

6) Soit  $(Q_p)$  une suite de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant :

$$\begin{cases} (i) & Q_0 = 1 \\ (ii) & \forall p \geq 1 \quad Q'_p = pQ_{p-1} \\ (iii) & \forall p \geq 1 \quad Q_p(1) = -Q_p(0) \end{cases}$$

Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N} \quad Q_p = E_p$ .

Indications :

a) Prouver que :  $\forall p \in \mathbb{N} \quad Q_p = \sum_{k=0}^p C_p^k Q_k(0) X^{p-k}$ .

b) Montrer que la suite  $(Q_p(0))$  vérifie :

$$Q_0(0) = 1 \text{ et } \forall p \geq 1 \quad Q_p(0) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k Q_k(0) \quad .$$

c) Conclure.

7) a) montrer que :  $\forall p \in \mathbb{N} \quad E_p(X) = (-1)^p E_p(1-X)$ .

Indication : utiliser la question 6) avec un polynôme  $Q_p$  bien choisi.

7) b) Que signifie cette propriété quant à la courbe de la fonction  $f_p$  définie par :

$$\begin{cases} f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto E_p(x) \end{cases}$$

7) c) En déduire également la valeur de  $e_{2p}$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ .

IV) ÉTUDE DES FONCTIONS  $f_p$ .

1) On suppose que,  $p$  étant supérieur ou égal à 1 :

$$(H_p) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[ f_{4p-1}(x) > 0 \\ \forall x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ f_{4p-1}(x) < 0 \end{array} \right.$$

Démontrer que dans ces conditions  $f_{4p}$  admet sur  $]0,1[$  deux zéros réels et deux seulement (on pourra envisager les signes respectifs possibles de  $f_{4p}(1/2)$  et de  $f_{4p}(0)$ ).

En déduire l'allure de la courbe représentative de  $f_{4p}$ .

2) Déduire successivement de la question précédente, sous la même hypothèse :

- le signe de  $f_{4p}(x)$  et les variations de  $f_{4p+1}$ .
- le signe de  $f_{4p+1}(x)$  et les variations de  $f_{4p+2}$
- que  $f_{4p+2}$  admet sur  $]0,1[$  deux zéros et deux seulement.
- le signe de  $f_{4p+2}(x)$ , les variations de  $f_{4p+3}$  et le signe de  $f_{4p+3}(x)$ .

On présentera ces résultats sous forme de tableaux.

3) Montrer que l'hypothèse faite en (2) est vraie pour  $p = 1$  et en déduire qu'elle est vraie pour toute valeur de  $p$ ,  $p \geq 1$  ; indiquer sous forme de schémas les différentes allures que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions  $f_n$  selon les valeurs de  $n$ .

4) Donner le signe de  $e_{2p}$  en fonction de  $p$  ( $\geq 1$ ).

## CORRIGÉ DU PROBLÈME SUR LES NOMBRES ET POLYNOMES D'EULER.

$$D) 1) T_{2n}^1 = \sum_{k=1}^n (-(2k-1) + 2k) = \sum_{k=1}^n 1 = n \text{ et } T_{2n-1}^1 = n - 2n = -n.$$

$$2) T_{2n}^2 = \sum_{k=1}^n (-(2k-1)^2 + 2k^2) = \sum_{k=1}^n (4k-1) = 2n(n+1) - n = n(2n+1).$$

$$3) a) T_{2n}^p = \sum_{k=1}^n ((2k)^p - (2k-1)^p) = - \sum_{k=1}^n \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-q} C_p^q (2k)^q = (-1)^{p+1} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q C_p^q 2^q S_n^q.$$

$$3) b) T_{2n}^3 = S_n^0 - 2.3S_n^1 + 4.3S_n^2 = n - 3n(n+1) + 2n(n+1)(2n+1) = n^2(4n+3).$$

$$4) T_{2n}^p = \sum_{k=1}^n (2k)^p - \sum_{k=1}^n (2k-1)^p = 2 \sum_{k=1}^n (2k)^p - \sum_{k=1}^{2n} k^p = 2^{p+1} S_n^p - S_{2n}^p.$$

II) 1) a) Si  $P(X+2) = P(X)$ ,  $P(2n) - P(0) = 0$  pour tout  $n$ , donc  $P(X) - P(0) = 0$  et  $P$  est **constant**.

1) b) Si  $P(X+1) = -P(X)$ , alors  $P(X+2) = P(X)$  et  $P$  est constant donc **nul**.

2) a)  $\varphi_n$  est linéaire de noyau réduit à 0 par 1)b), et  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension finie.

b)  $\varphi$  est injective, et elle est surjective car les  $\varphi_n$  le sont.

3)  $E_0 = 1$ ,  $E_1 = X - \frac{1}{2}$  et  $E_2 = X^2 - X$ .

4) a) On a :  $k^p = \frac{1}{2} (E_p(k+1) + E_p(k))$ , donc :

$$T_n^p = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^k (E_p(k+1) + E_p(k)) = \frac{1}{2} ((-1)^n E_p(n+1) - E_p(1)).$$

4) b)  $T_n^2 = \frac{1}{2} ((-1)^n ((n+1)(n+1-1)) = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1)$ .

III) 1) Car  $E_p(0) + E_p(1) = 2(0)^p = 0$ .

2) a) Soit  $Q = (\varphi^{-1}(P))$ ; alors  $\varphi(Q') = Q'(X) + Q'(X+1) = (\varphi(Q))' = P'$ , donc  $\varphi^{-1}(P') = Q' = (\varphi^{-1}(P))'$ .

2) b)  $E_p' = (\varphi^{-1}(2X^p))' = \varphi^{-1}(2pX^{p-1}) = pE_{p-1}$ .

3) D'après 2)b),  $E_p^{(p-k)} = \frac{p!}{k!} E_k$ , donc, en utilisant la formule de Taylor :

$$E_p = \sum_{k=0}^p \frac{E_p^{(p-k)}(0)}{(p-k)!} X^{p-k} = \sum_{k=0}^p \frac{p!}{(p-k)! k!} E_k(0) X^{p-k} = \sum_{k=0}^p C_p^k e_k X^{p-k}.$$

4) a)  $e_p = -E_p(1) = -\sum_{k=0}^p C_p^k e_k = -e_p - \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k e_k$ , donc  $e_p = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k e_k$ .

4) b)  $e_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $e_2 = 0$ ,  $e_3 = \frac{1}{4}$ ,  $e_4 = 0$ .

5) a)  $E_p = p \cdot \text{prim}(E_{p-1}) + e_p$  où  $\text{prim}(Q)$  désigne la primitive de  $Q$  s'annulant en 0.

$$E_3 = X^3 - \frac{3}{2} X^2 + \frac{1}{4}, \quad E_4 = X^4 - 2X^3 + X.$$

5) b)  $T_n^4 = \frac{(-1)^n}{2} ((n+1)^4 - 2(n+1)^3 + n+1) = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1)(n^2 + n - 1)$ .

6) a)  $\varphi((-1)^p E_p(1-X)) = (-1)^p (E_p(1-X) + E_p(-X))$   
 $= (-1)^p \varphi(E_p(-X)) = (-1)^p (-2X)^p = \varphi(E_p)$

donc  $E_p = (-1)^p E_p(1-X)$ .

- 6) b) Cela signifie que cette courbe est symétrique par rapport à la droite  $x = 1/2$  pour  $p$  pair, et par rapport au point  $(1/2,0)$  pour  $p$  impair.
- 6) c)  $e_{2^p} = 0$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ .