Problème d'après ICARE 1997

Les matrices pseudo-inversibles.

Soient A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$; on dit que B est un pseudo-inverse de A si

$$\begin{cases} AB = BA \\ ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

Une matrice qui possède un pseudo-inverse est dite pseudo-inversible.

Question préliminaire : montrer que si B est un pseudo-inverse de A et $E = AB,$ alors

$$\begin{cases} AB = BA = E \\ AE = EA = A \\ BE = EB = B \\ E^2 = E \end{cases}$$

On rappelle qu'une matrice carrée, même non nulle, n'est pas forcément simplifiable dans l'anneau des matrices carrées.

PREMIÈRE PARTIE : propriétés des matrices pseudo-inversibles.

1) Montrer que la matrice nulle est pseudo-inversible.

2) Montrer qu'une matrice inversible est pseudo-inversible.

3) Montrer l'unicité du pseudo-inverse d'une matrice, s'il existe (indication : si B_1 et B_2 sont deux pseudo-inverses, calculer d'abord AB_1AB_2) .

L'unique pseudo-inverse d'une matrice pseudo-inversible A sera noté A'.

4) Montrer que si A est pseudo-inversible, alors

a) A',

b) $E = AA'$,

c) λA (λ réel non nul),

d) A^k (k entier > 0),

e) ${}^tA$ (transposée de A),

f) $PAP^{-1},$ pour P inversible,

sont pseudo-inversibles et donner $(A')', E', (\lambda A)',\ (A^k)', ({}^tA)',\ (PAP^{-1})'$.

5) Montrer que si $A^2 = \lambda A$ avec λ réel non nul, alors A est pseudo-inversible (indication : calculer A^3) ; déterminer par exemple les pseudo-inverses de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6) Question de cours : montrer que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A)$ et $\leqslant \mathrm{rg}(B)$; en déduire que si A est pseudo-inversible, $\mathrm{rg}(AA') = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$ puis que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

7) Montrer que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas pseudo-inversible.

8) Montrer qu'une matrice diagonale $D = diag(a_1, \ldots, a_n)$, avec des coefficients a_i pouvant être nuls, est pseudo-inversible et donner son pseudo-inverse.

9) Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et f l'endomorphisme de matrice A dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace vectoriel de dimension 3.

a) Déterminer la matrice de f dans $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{k} + \vec{i})$.

b) En déduire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

c) En déduire le pseudo-inverse de A.

10)

a) Donner un exemple de deux matrices pseudo-inversibles dont le produit n'est pas pseudo-inversible.

b) Montrer que si A et B sont deux matrices pseudo-inversibles vérifiant $AA' = BB' = E$, alors AB est pseudo-inversible. En déduire que si E est une matrice telle que $E^2 = E$, l'ensemble G_E des matrices pseudo-inversibles A telles que $AA' = E$ muni du produit des matrices est un groupe (dans le cas où E n'est pas égal à I_n, on est donc en présence d'un groupe qui est inclus dans un groupe sans en être un sous-groupe !).

DEUXIÈME PARTIE

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$; f l'endomorphisme de matrice A dans une base fixée $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$.

On veut montrer l'équivalence :

$$A \text{ est pseudo-inversible si et seulement si } \mathbb{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$$

1) On suppose A pseudo-inversible de pseudo-inverse A' ; soit f' l'endomorphisme de matrice A' dans $\mathcal{B}$.

a) Montrer que $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$; en déduire $\mathbb{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

b) Montrer que $e = f \circ f'$ est la projection de base $\operatorname{Im} f$ et de direction $\ker f$.

2) On suppose que $\mathbb{E} = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

a) Montrer que la restriction f_0 de f à $\operatorname{Im} f$ est une bijection de $\operatorname{Im} f$ dans lui-même.

b) Pour $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ avec $\vec{x_1} \in \ker f$ et $\vec{x_2} \in \operatorname{Im} f$, on pose $f'(\vec{x}) = f_0^{-1}(\vec{x_2})$.

Vérifier que

$$f \circ f' = f' \circ f$$
$$f \circ f' \circ f = f$$
$$f' \circ f \circ f' = f'$$

Conclure.

3) Le pot-aux-roses.

Déduire de ce qui précède que A est pseudo-inversible si et seulement si A est semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ où A_0 est une matrice carrée inversible d'ordre rg(A).