PROBLEME NIVEAU SUP
INTRODUCTION AUX QUATERNIONS

Rédigé par Robert FERREOL ferreol@mathcurve.com

Les quaternions généralisent les nombres complexes ; alors qu'un nombre complexe s'écrit $z = a + ib$ avec a et b réels, un quaternion s'écrit $q = a + \vec{u}$ avec a réel et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{E}_3$, espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$; le réel a est la partie *réelle* de q et $\vec{u}$ sa partie *vectorielle* , et deux quaternions sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie vectorielle.

L'ensemble des quaternions $\mathbb{R} + \mathbb{E}_3$ est noté $\mathbb{H}$ du nom de Hamilton qui les a découverts.

Le quaternion *vectoriel* $0 + \vec{u}$ est simplifié en $\vec{u}$ et le *quaternion* réel $a + \vec{0}$ est simplifié en a, de sorte que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{E}_3$ sont tous deux inclus dans $\mathbb{H}$ et ont en commun uniquement le quaternion nul noté 0.

Le *conjugué* du quaternion $q = a + \vec{u}$ est par définition $\overline{q} = a - \vec{u}$.

Q1 Vérifier que q est réel si et seulement si $q = \overline{q}$ et qu'il est vectoriel si et seulement si $q = -\overline{q}$.

On définit dans $\mathbb{H}$ une addition : $(a + \vec{u}) + (b + \vec{v}) = (a + b) + (\vec{u} + \vec{v})$
et une multiplication : $(a + \vec{u})(b + \vec{v}) = \underbrace{ab - \left(\vec{u} \mid \vec{v}\right)}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v}}_{\text{partie vectorielle}}$.

Q2 : Compléter

$$\vec{u}\vec{v} \text{ est réel} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont ..., et alors } \vec{u}\vec{v} = \ldots$$
$$\vec{u}\vec{v} \text{ est vectoriel} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont ..., et alors } \vec{u}\vec{v} = \ldots$$

Q3 : Compléter la table de multiplication

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$			
$\vec{j}$			
$\vec{k}$			

quelle propriété manque-t-il donc à la multiplication dans $\mathbb{H}$?

Q4 : Montrer que deux quaternions commutent pour la multiplication si et seulement si leurs parties vectorielles sont colinéaires. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quaternion commute avec tous les autres quaternions.

Q5 : Montrer que si q et r sont deux quaternions, $\overline{q + r} = \overline{q} + \overline{r}$ et que $\overline{qr} = \overline{r}\ \overline{q}$ (attention danger !) et que $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + \|\vec{u}\|^2$ est un réel, > 0 dès que q est non nul.

Q6 : Montrer que

q est réel $\Leftrightarrow q^2$ est un réel $\geqslant 0$

q est vectoriel $\Leftrightarrow q^2$ est un réel $\leqslant 0$

q est un vecteur unitaire (i.e. $q = \vec{u}$ avec $\|\vec{u}\| = 1$) $\Leftrightarrow q^2 = -1$

Rem : dans les quaternions, le polynôme $X^2 + 1$ possède donc une infinité de racines !

Q7 : Montrer que $q_1 = ((a+\vec{u})(b+\vec{v}))(c+\vec{w})$ a pour partie réelle :

$$abc - a\left(\vec{v} \mid \vec{w}\right) - b\left(\vec{u} \mid \vec{w}\right) - c\left(\vec{u} \mid \vec{v}\right) - \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$$

et pour partie vectorielle :

$$ab\vec{w} + bc\vec{u} + ac\vec{v} + a\vec{v} \wedge \vec{w} + b\vec{u} \wedge \vec{w} + c\vec{u} \wedge \vec{v} - \left(\vec{u} \mid \vec{v}\right)\vec{w} - \left(\vec{v} \mid \vec{w}\right)\vec{u} + \left(\vec{u} \mid \vec{w}\right)\vec{v}$$

Un calcul similaire montrerait que $q_2 = (a+\vec{u})((b+\vec{v})(c+\vec{w}))$ est égal à q_1 et que donc la multiplication des quaternions est associative ; quelles propriétés manque-t-il pour pouvoir affirmer que $\mathbb{H}$ muni de l'addition et de la multiplication est un anneau ? On tiendra ces propriétés pour démontrées dans la suite.

Q8 : Montrer que

$$\vec{w}\vec{v}\vec{u} = -\overline{\vec{u}\vec{v}\vec{w}}$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u})$$
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \frac{1}{2}(\vec{u}\vec{v}\vec{w} - \vec{v}\vec{w}\vec{u})$$

On pose $|q| = \sqrt{q\overline{q}}$ (réel appelé module de q) ; remarquons que si q est vectoriel, son module coïncide avec sa norme.

Q9 : Montrer que $|qr| = |q||r|$.

Q10 : Soit q un quaternion non nul et $q' = \dfrac{1}{|q|^2}\overline{q}$; que valent qq' et $q'q$? Qu'en déduit-on pour l'ensemble $\mathbb{H}$ muni de l'addition et de la multiplication ?

Le quaternion q' est noté q^{-1} (on évitera d'écrire $\dfrac{1}{q}$ à cause de la non commutativité) ; si $\vec{u} \in \mathbb{E}_3$, que vaut $(\vec{u})^{-1}$?

Q11 : Montrer que si $q = a + \vec{n}$ est un quaternion unitaire ($|q| = 1$) et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{E}_3$, $f_q(\vec{u}) = q\,\vec{u}\,\overline{q}$ est vectoriel (utiliser Q6).

Ceci définit donc une application f_q de $\mathbb{E}_3$ dans lui-même.

Q12 : Montrer que f_q est une isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) de $\mathbb{E}_3$.

Q13 : Montrer que $f_q\left(\vec{n}\right) = \vec{n}$; qu'en déduit-on pour la nature de f_q?

Q14 : Que dire de $f_q \circ f_r$ (avec q et r unitaires) ?

Q15 : On suppose que q est vectoriel ($q = \overrightarrow{n}$) ; vérifier que $f_{\overrightarrow{n}}(\overrightarrow{u}) = 2\left(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} - \overrightarrow{u}$;

qu'est-ce donc que l'isométrie $f_{\overrightarrow{n}}$ dans ce cas (bien donner ses éléments caractéristiques) ? Qu'est-ce que $-f_{\overrightarrow{n}}$?

Q16 : on pose $q = a + b\overrightarrow{i} + c\overrightarrow{j} + d\overrightarrow{k}$ (on a donc $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$) ; déterminer en fonction de a, b, c, d la matrice A de f_q dans $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$; on trouvera :

$$A_q = \begin{bmatrix} 2(a^2+b^2)-1 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac) \\ 2(bc+ad) & 2(a^2+c^2)-1 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(cd+ab) & 2(a^2+d^2)-1 \end{bmatrix}$$

(représentation paramétrique rationnelle d'Euler des matrices orthogonales directes, 1770)

En déduire la forme générale d'un retournement dans une base orthonormée.

Q 17 : on suppose $a = b = c$ et $d = 0$; donner la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie f_q , et de $-f_q$.

Q18 : On revient au cas général ; l'on pose $\overrightarrow{i'} = \dfrac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}$ et l'on complète en une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ de $\mathbb{E}_3$; écrire la matrice A'_q de f_q dans $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ en fonction de a et $b' = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ (utiliser Q15) ; en déduire que si l'on définit, modulo 2π, le nombre α par $a = \cos\alpha$ et $b' = \sin\alpha$ (donc $q = \cos\alpha + \sin\alpha\,\overrightarrow{i'}$), f_q est la rotation d'angle 2α autour de $\overrightarrow{n}$; retrouver ainsi les résultats de Q15 et Q17.

Q19 : En déduire que si r_1 est la rotation d'angle θ_1 autour de $\overrightarrow{n_1}$ (vecteur unitaire) et r_2 est la rotation d'angle θ_2 autour de $\overrightarrow{n_2}$, alors $r_2 \circ r_1$ est la rotation d'angle θ autour de $\overrightarrow{n}$ avec

$$\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}$$
$$\sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{n} = \cos\frac{\theta_1}{2}\overrightarrow{n_2} + \cos\frac{\theta_2}{2}\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2} \wedge \overrightarrow{n_1}$$

Application : quel doit être l'angle (en degrés) entre $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ pour que la rotation d'un tiers

de tour autour de $\overrightarrow{n_1}$ suivie de la rotation d'un tiers de tour autour de $\overrightarrow{n_2}$ (dans le même sens) soit équivalente à une rotation d'un tiers de tour ?

Q20 : Montrer que

$$A = \frac{1}{p^2+q^2+r^2+s^2}\begin{bmatrix} p^2+q^2-r^2-s^2 & 2(qr-ps) & 2(qs+pr) \\ 2(qr+ps) & p^2-q^2+r^2-s^2 & 2(rs-pq) \\ 2(qs-pr) & 2(rs+pq) & p^2-q^2-r^2+s^2 \end{bmatrix}$$

où p, q, r, s sont 4 entiers non tous nuls est une matrice orthogonale directe à coefficients rationnels. Toute matrice orthogonale directe à coefficients rationnels est-elle de cette forme ?