PRONLEME NIVEAU SUP REDIGE PAR ROBERT FERREOL ferreol@mathcurve.com

Le but de ce problème est d'obtenir le développement limité :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - R + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Dans tout ce problème , n désigne un entier ≥ 1.

I) **Un premier encadrement.**

On pose : $r_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $s_n = 2\sqrt{n}$ - r_n et $t_n = s_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.

Appelons R leur limite commune.

2) Vérifier que $r_n = 2\sqrt{n} - R + \varepsilon_n$ avec $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3) Déterminer la partie entière de R .

II) **Application au calcul de** $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}}$.

1) On pose $u_n = r_{2n} - \sqrt{2}.r_n$; déterminer $\lim u_n$ en fonction de R.

2) On pose $r'_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$; vérifier que $r'_{2n} = u_n$.

3) Montrer que, d'une façon générale, si, pour une suite (u_n), les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes de même limite, alors (u_n) est convergente.

4) Exprimer $S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\left(= \lim_{n\to+\infty} r'_n\right)$ en fonction de R .

III) **Raffinement de l'encadrement de ε_n obtenu dans le I).**

1) Établir :

$$\forall \alpha > 1 \forall k > 1 \ \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right);$$

On pourra pour cela encadrer l'intégrale $\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^\alpha}$ ou bien utiliser une inégalité d'accroissements finis pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1}}$.

2) En déduire que pour $\alpha > 1$ la suite $\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^\alpha}\right)_{N\geq 1}$ est convergente, et que :

$$\forall \alpha > 1 \forall n \geq 2 \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\left(= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}\right) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} .$$

3) Établir : $\forall x \in [0,1] \quad 1-\frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2$,

puis : $\forall x \in [0,1] \quad 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$.

4) En déduire que $\frac{1}{4k\sqrt{k}}-\frac{3}{8k^2\sqrt{k}} \leq \varepsilon_k-\varepsilon_{k+1} \leq \frac{1}{4k\sqrt{k}}+\frac{1}{8k^2\sqrt{k}}$ pour $k \geq 1$. (on rappelle que $\varepsilon_k = r_k - 2\sqrt{k}+R$).

5) Que vaut $\sum_{k=n}^{\infty}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})\left(=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n}^{N}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1})\right)$?

6) En déduire l'encadrement :

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{4(n-1)\sqrt{n-1}} \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n-1}}+\frac{1}{12(n-1)\sqrt{n-1}} .$$

7) Conclure en donnant un équivalent de ε_n et un développement de r_n.

8) a) Déterminer un encadrement de R de largeur 0,1 (justifier le nombre d'itérations).
8) b) Comparer R et 1,46.