

Étude des suites homographiques.

Pb niveau sup rédigé par R. FERREOL

I Étude d'un cas particulier.

On se place dans l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ où l'on pose, par convention : $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty, z - \infty = z + \infty = \infty$ si z est un complexe.

Fixons un complexe δ , et considérons l'application g de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, définie par $g(z) = 2\delta - \frac{1}{z}$.

- 1) Que valent donc $g(0)$ et $g(\infty)$?
- 2) Donner l'allure de la courbe de la restriction de g à \mathbb{R} , pour δ réel.
- 3) Soit h l'application de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ définie par $h(z) = \frac{1}{2\delta - z}$; montrer que g est bijective et que h est sa réciproque (méthode "deus ex machina").
- 4) Montrer que g possède un point fixe (i. e. un complexe z tel que $g(z) = z$) unique si $\delta = \pm 1$ et qu'elle en possède deux sinon.
- 5) Montrer que si z n'est pas un point fixe de g , alors $g(z)$ non plus.

On définit une suite récurrente dans $\hat{\mathbb{C}}$ par
$$\begin{cases} v_0 \in \hat{\mathbb{C}} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}.$$

- 6) On suppose $\delta = 1$;
 - a) Visualiser la suite (v_n) sur une figure en prenant pour v_0 une valeur réelle 1 comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1 (montrer 5-6 termes).
 - b) Montrer que si $v_0 \neq 1$, la suite $\left(\frac{1}{v_n - 1}\right)$ est arithmétique, et en déduire le calcul de v_n en fonction de n et v_0 , puis $\lim v_n$.
- 7) Montrer que si $\delta = -1$, on peut se ramener au cas précédent en considérant $(-v_n)$.
- 8) On considère maintenant le cas $\delta \neq \pm 1$; soient α et β les deux points fixes de g , en les choisissant de sorte que $|\alpha| \geq |\beta|$, et l'on pose $u = \frac{\beta}{\alpha}$.
 - a) On suppose $v_0 \neq \alpha$ et $\neq \beta$ et l'on pose $V_n = \frac{v_n - \alpha}{v_n - \beta}$ (si par hasard v_n vaut ∞ on pose $V_n = 1$) ; montrer que (V_n) est géométrique de raison u .
 - b) Exprimer v_n en fonction de V_n , et montrer l'expression :

$$v_n = \frac{\alpha^{n+1}(v_0 - \beta) - \beta^{n+1}(v_0 - \alpha)}{\alpha^n(v_0 - \beta) - \beta^n(v_0 - \alpha)}.$$
 - c) On suppose $|u| \neq 1$; déterminer $\lim V_n$ et en déduire que (v_n) converge toujours vers celui des points fixes de g qui a le plus grand module.

- d) Montrer que u est de module 1 si et seulement si $A = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)$ est un réel appartenant à $[-1, 1]$.
- e) Vérifier que $\begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 2\delta \end{cases}$; en déduire que $A = 2\delta^2 - 1$ et que u est de module 1 si et seulement si δ est un réel appartenant à $[-1, 1]$; se plaçant dans ce cas, on pose $\theta = 2 \arccos \delta$: montrer que $u = e^{\pm i\theta}$; quitte à échanger α et β , on choisira $u = e^{i\theta}$.
- f) Montrer que si $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel, $\left(\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q} \right)$ avec p, q entiers > 0 premiers entre eux) alors (v_n) est périodique de plus petite période q si p est pair, et de plus petite période $2q$ si p est impair.

On admettra que si $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, alors (v_n) est non bornée.

II) Étude du cas général.

Soient a, b, c, d 4 complexes, $c \neq 0$; on pose $S = \frac{a+d}{2}$ et $P = ad - bc$.

- 1) Vérifier que si z est un complexe différent de $-\frac{d}{c}$, alors $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow P = 0$.

On suppose ce cas exclu dans la suite et on désigne par f l'application de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, définie par $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ si $z \in \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$, et l'on définit une

suite récurrente dans $\hat{\mathbb{C}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \hat{\mathbb{C}} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- 2) Montrer que f est une bijection.
- 3) Soit p l'une des racines carrées de P et $\delta = \frac{S}{p}$; montrer que

$$g\left(\frac{cz+d}{p}\right) = \frac{cf(z)+d}{p} ; \text{ en déduire que si l'on pose } v_n = \frac{1}{p}(cu_n + d), \text{ alors } v_{n+1} = g(v_n).$$

- 4) Montrer la conclusion générale suivante : si u_0 n'est pas un point fixe de f , alors,

- a) Si $\delta \notin]-1, 1[$ (soit $\frac{S^2}{P} \notin [0, 1[$), (u_n) est toujours convergente vers le point fixe γ de f tel que si η est un autre point fixe, alors $|c\gamma + d| > |c\eta + d|$;
- b) Si $\delta \in]-1, 1[$ (soit $\frac{S^2}{P} \in [0, 1[$) et si l'on pose $\theta = 2 \arccos \delta$;
- soit $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel et (u_n) n'est pas bornée.

- soit $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers > 0 premiers entre eux et (u_n) est périodique de plus petite période q si p est pair, et de plus petite période $2q$ si p est impair.