Étude des suites homographiques.

Pb niveau sup rédigé par R. FERREOL

I Étude d'un cas particulier.

On se place dans l'ensemble $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ où l'on pose, par convention : $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty, z - \infty = z + \infty = \infty$ si z est un complexe.

Fixons un complexe δ, et considérons l'application g de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, définie par $g(z) = 2\delta - \frac{1}{z}$.

1) Que valent donc $g(0)$ et $g(\infty)$?
2) Donner l'allure de la courbe de la restriction de g à $\mathbb{R}$, pour δ réel.
3) Soit h l'application de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ définie par $h(z) = \frac{1}{2\delta - z}$; montrer que g est bijective et que h est sa réciproque (méthode "deus ex machina").
4) Montrer que g possède un point fixe (i. e. un complexe z tel que $g(z) = z$) unique si $\delta = \pm 1$ et qu'elle en possède deux sinon.
5) Montrer que si z n'est pas un point fixe de g, alors $g(z)$ non plus.

On définit une suite récurrente dans $\hat{\mathbb{C}}$ par $\begin{cases} v_0 \in \hat{\mathbb{C}} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$.

6) On suppose $\delta = 1$;
   a) Visualiser la suite (v_n) sur une figure en prenant pour v_0 une valeur réelle 1 comprise entre ½ et 1 (montrer 5-6 termes).
   b) Montrer que si $v_0 \neq 1$, la suite $\left(\frac{1}{v_n - 1}\right)$ est arithmétique, et en déduire le calcul de v_n en fonction de n et v_0, puis $\lim v_n$.
7) Montrer que si $\delta = -1$, on peut se ramener au cas précédent en considérant $(-v_n)$.
8) On considère maintenant le cas $\delta \neq \pm 1$; soient α et β les deux points fixes de g, en les choisissant de sorte que $|\alpha| \geq |\beta|$, et l'on pose $u = \frac{\beta}{\alpha}$.
   a) On suppose $v_0 \neq \alpha$ et $\neq \beta$ et l'on pose $V_n = \frac{v_n - \alpha}{v_n - \beta}$ (si par hasard v_n vaut ∞ on pose V_n = 1) ; montrer que (V_n) est géométrique de raison u.
   b) Exprimer v_n en fonction de V_n, et montrer l'expression :
   $$\boxed{v_n = \frac{\alpha^{n+1}(v_0 - \beta) - \beta^{n+1}(v_0 - \alpha)}{\alpha^n(v_0 - \beta) - \beta^n(v_0 - \alpha)}}.$$
   c) On suppose $|u| \neq 1$; déterminer $\lim V_n$ et en déduire que (v_n) converge toujours vers celui des points fixes de g qui a le plus grand module.

d) Montrer que u est de module 1 si et seulement si $A=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$ est un réel appartenant à [- 1 , 1].

e) Vérifier que $\begin{cases}\alpha\beta=1\\ \alpha+\beta=2\delta\end{cases}$; en déduire que $A=2\delta^2-1$ et que u est de module 1 si et seulement si δ est un réel appartenant à [- 1 , 1] ; se plaçant dans ce cas, on pose $\theta=2\arccos\delta$: montrer que $u=e^{\pm i\theta}$; quitte à échanger α et β, on choisira $u=e^{i\theta}$.

f) Montrer que si $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel, ($\frac{\theta}{\pi}=\frac{p}{q}$ avec p,q entiers > 0 premiers entre eux) alors (v_n) est périodique de plus petite période q si p est pair, et de plus petite période 2q si p est impair.

On admettra que si $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, alors (v_n) est non bornée.

II) Étude du cas général.

Soient a, b, c, d 4 complexes , $c\neq 0$; on pose $S=\frac{a+d}{2}$ et $P=ad-bc$.

1) Vérifier que si z est un complexe différent de $-\frac{d}{c}$, alors $\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}\Leftrightarrow P=0$.

On suppose ce cas exclu dans la suite et on désigne par f l'application de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$, définie par $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ si $z\in\mathbb{C}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $f\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$, $f(\infty)=\frac{a}{c}$, et l'on définit une suite récurrente dans $\hat{\mathbb{C}}$ par $\begin{cases}u_0\in\hat{\mathbb{C}}\\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

2) Montrer que f est une bijection.

3) Soit p l'une des racines carrées de P et $\delta=\frac{S}{p}$; montrer que $g\left(\frac{cz+d}{p}\right)=\frac{cf(z)+d}{p}$; en déduire que si l'on pose $v_n=\frac{1}{p}(cu_n+d)$, alors $v_{n+1}=g(v_n)$.

4) Montrer la conclusion générale suivante : si u_0 n'est pas un point fixe de f, alors,

a) Si $\delta\notin]-1,1[$ (soit $\frac{S^2}{P}\notin[0,1[$), (u_n) est toujours convergente vers le point fixe γ de f tel que si η est un autre point fixe, alors $|c\gamma+d|>|c\eta+d|$;

b) Si $\delta\in]-1,1[$ (soit $\frac{S^2}{P}\in[0,1[$) et si l'on pose $\theta=2\arccos\delta$;

- soit $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel et (u_n) n'est pas bornée.

- soit $\frac{\theta}{\pi}=\frac{p}{q}$ avec p,q entiers > 0 premiers entre eux et (u_n) est périodique de plus petite période q si p est pair, et de plus petite période $2q$ si p est impair.