

TOUT SUR LE TRIANGLE

1. DONNÉES ET NOTATIONS

- * 3 points A, B, C non alignés d'un plan affine euclidien P orienté de façon à ce que (\vec{AB}, \vec{AC}) soit directe.
- * A, B, C , sommets du triangle ABC ; les mêmes lettres désignent les mesures dans $[0, \pi]$ des angles en A, B, C .
- * $[BC], [CA], [AB]$ les côtés, de longueurs respectives a, b, c .
- * $2p = a + b + c$, périmètre du triangle.
- * S , aire du triangle.
- * I_A, I_B, I_C , milieux de $[BC], [CA], [AB]$; ce sont les pieds des médianes issues de A, B, C .
- * H_A, H_B, H_C projetés orthogonaux de A, B, C sur $(BC), (CA)$ et (AB) ; ce sont les pieds des hauteurs $(AH_A), (BH_B)$ et (CH_C) .
- * $h_A = AH_A, h_B = BH_B, h_C = CH_C$.

2. RELATIONS FONDAMENTALES

Un astérisque (*) signifie qu'il y a 2 autres relations qui s'obtiennent par permutation des points.

Inégalité triangulaire (qui est une CNS d'existence du triangle) :

$$|b - c| < a < b + c \quad (*) \quad \boxed{1}$$

$$A + B + C = \pi \quad \boxed{2}$$

d'où

$$\boxed{3} \quad \begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \\ \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1 \end{cases}$$

$$a = b \cos C + c \cos B \quad (*) \quad \boxed{4}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (*) \quad \boxed{5} \quad \text{(formule d'Al Kashi)}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (*) \quad \boxed{6} \quad \text{(formule de Héron)}$$

$$S \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} ah_a \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \boxed{7}$$

La loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} \quad \boxed{8}$$

Les formules de la médiane :

9	$b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2AI_A^2 \quad (*)$ $b^2 - c^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{H_A I_A} \quad (*)$
---	--

Indications de démonstration :

- 1 Utiliser les conditions d'intersection de 2 cercles.
- 2 Considérer la figure :

- 4 Projeter sur (BC) .
- 5 Résoudre en $\cos A$ le système obtenu dans 4 ou calculer $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$.
- 6 Utiliser $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$.
- 7 Pour la première égalité, considérer la figure :

Pour la deuxième égalité, utiliser $\sin A = \frac{h_B}{c} = \frac{2S}{bc}$ ou bien

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI_A} \wedge \overrightarrow{BC}.$$

- 8 Se déduit de 7.

- 9 Utiliser $b^2 = (\overrightarrow{AI_A} + \overrightarrow{I_A C})^2$ et $c^2 = (\overrightarrow{AI_A} + \overrightarrow{I_A B})^2$.

3. TRIANGLES ISOCÈLES

PROP $A = B \Leftrightarrow a = b$ (utiliser 5)

DEF Un triangle est dit *isocèle* s'il a 2 cotés (ou 2 angles) égaux, *équilatéral*, s'il a trois côtés égaux (donc 3 angles de mesure $\frac{\pi}{3}$).

4. TRIANGLES RECTANGLES

PROP : $A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (théorème de Pythagore)

DEF Un triangle est dit *rectangle* s'il a un angle droit.

5. CAS D'ÉGALITE DES TRIANGLES

On devrait dire cas d'*isométrie* des triangles.

PROP : pour ABC et $A'B'C'$ 2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

a. $\exists f \in Is(P) \ / \ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

b. $a = a', b = b', c = c'$

c. $A = A', b = b', c = c' **$

d. $A = A', B = B', c = c' **$

Dans le temps on disait, 2 triangles sont égaux s'ils ont 3 côtés correspondants égaux, ou 2 côtés égaux et un angle égal ou 2 angles égaux et un coté égal.

Indication : démontrer $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

Les 3 dernières implications utilisent les formules 5 ; pour $4. \Rightarrow 1$.

utiliser la rotation r telle que $r(A) = A'$ et $\vec{r}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ et composer

éventuellement avec une symétrie.

6. CAS DE SIMILITUDE DES TRIANGLES

PROP : pour ABC et $A'B'C'$ 2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

a. $\exists f \in \text{Sim}(P) / f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

b. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

c. $A = A', B = B', C = C'$

Indication : prouver $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ (utiliser les formules 5) ; pour $(c) \Rightarrow (a)$, utiliser les cas d'égalité.

7. POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE

a. Les médianes sont concourantes au *centre de gravité* G de ABC . On a $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI_A}$; G est aussi le point rendant minimum la fonction scalaire de Leibniz :

$$f(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2$$

b. Les trois hauteurs sont concourantes en l'*orthocentre* du triangle ; utiliser par exemple :

$$\forall X \in P \quad \vec{AX} \cdot \vec{BC} + \vec{BX} \cdot \vec{CA} + \vec{CX} \cdot \vec{AB} = 0$$

c. Centre du cercle circonscrit.

i. Il existe un unique point O équidistant des trois sommets ; c'est le point de concours des médiatrices des trois côtés, et c'est le centre du cercle circonscrit (C) au triangle ; on appelle A', B', C' les points diamétralement opposés à A, B, C .

ii. Sachant que $\widehat{(B'B, B'C)} = A$ (théorème de l'arc capable) montrer que $\sin A = \frac{a}{2R}$ d'où :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \boxed{10}$$

$$abc = 4RS \quad \boxed{11}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad \boxed{12}$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad \boxed{13}$$

iii. O est l'orthocentre du triangle $I_A I_B I_C$.

iv. I_A est le milieu de $[A'H]$ (*)

v. Les symétriques orthogonaux de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit.

(Indication : si s est la symétrie orthogonale par rapport à (BC) montrer que $Hs(O) = R$ et regarder $\vec{s}(\overrightarrow{Hs(O)})$, ou bien montrer que $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(HC, HB)} = \widehat{(s(H)B, s(H)C)}$).

d. Centre du cercle inscrit.

i. Il existe un unique point I équidistant de $(AB), (BC), (CA)$; ce point est le point de concours des 3 bissectrices intérieures des angles géométriques du triangle ; appelons U, V, W les projetés orthogonaux de I sur les côtés $[BC], [CA], [AB]$; on pose $IU = IV = IW = r$; le cercle (c) de centre I et de rayon r est le *cercle inscrit dans le triangle*.

ii. En ajoutant les aires des triangles BIC, CIA et AIB , montrer que

$$S = pr \quad \boxed{14}$$

iii. Montrer que $AV = AW = p - a$ (*) (poser $x = AV, y = BU$ et $z = CW$ et calculer $x + y, y + z, z + x$)

iv. En déduire AI^2 en fonction a, b, c .

v. Soient X, Y, Z les pieds des bissectrices issues de A, B, C sur les côtés opposés ; montrer que

$$\frac{XB}{c} = \frac{XC}{b} = \frac{a}{b+c}$$

(utiliser $\boxed{10}$ dans ABX et ACX).

8. LIENS ENTRE O, G et H . CERCLE DES 9 POINTS

Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$; quel est le transformé du triangle ABC ? En utilisant le c. du VII. 3. montrer que $h(H) = O$ et en déduire le fait que O, G et H sont alignés : leur droite commune s'appelle la droite d'Euler du triangle. Montrer $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$.

Soit $(C') = h((C))$; montrer que son centre Ω est le milieu de $[OH]$ et son rayon $\frac{R}{2}$; montrer que l'homothétie h' de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ transforme aussi (C) en (C') . En déduire que (C') passe par :

- les pieds des médianes du triangle ABC
- les pieds des hauteurs
- les milieux des segments joignant chaque sommet à l'orthocentre. (C') s'appelle le *cercle d'Euler* ou *cercle des 9 points* du triangle ABC .

9. COORDONNÉES BARYCENTRIQUES DE CES POINTS REMARQUABLES.

a. Démontrer que

$$\forall M \in P \quad \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM})\overrightarrow{AM} + \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AM})\overrightarrow{BM} + \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

En déduire que les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B, C) sont

$$\begin{array}{|l} \text{aire}(MBC) \\ \text{aire}(MCA) \\ \text{aire}(MAB) \end{array}$$

(il s'agit des aires "algébriques").

b. G a pour coordonnées barycentriques $\begin{array}{|l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$. En déduire 3 triangles

ayant la même aire.

c. I a pour coordonnées barycentriques $\begin{array}{|l} \sin A \\ \sin B \\ \sin C \end{array}$ ou $\begin{array}{|l} a \\ b \\ c \end{array}$ (utiliser 1. et la formule 10 ou bien utiliser 7. (d).v.

d. O a pour coordonnées barycentriques $\begin{array}{|l} \sin 2A \\ \sin 2B \\ \sin 2C \end{array}$ ou $\begin{array}{|l} a \cos A \\ b \cos B \\ c \cos C \end{array}$ (utiliser $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = R^2 \sin 2A$).

e. H a pour coordonnées barycentriques $\begin{array}{|l} \tan A \\ \tan B \\ \tan C \end{array}$ ou $\begin{array}{|l} a/\cos A \\ b/\cos B \\ c/\cos C \end{array}$ (utiliser $\overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{HG}$)