

## TOUT SUR LE TRIANGLE

### 1. DONNÉES ET NOTATIONS

- \* 3 points  $A, B, C$  non alignés d'un plan affine euclidien  $P$  orienté de façon à ce que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  soit directe.
- \*  $A, B, C$ , sommets du triangle  $ABC$  ; les mêmes lettres désignent les mesures dans  $[0, \pi]$  des angles en  $A, B, C$ .
- \*  $[BC], [CA], [AB]$  les côtés, de longueurs respectives  $a, b, c$ .
- \*  $2p = a + b + c$ , périmètre du triangle.
- \*  $S$ , aire du triangle.
- \*  $I_A, I_B, I_C$ , milieux de  $[BC], [CA], [AB]$  ; ce sont les pieds des médianes issues de  $A, B, C$ .
- \*  $H_A, H_B, H_C$  projetés orthogonaux de  $A, B, C$  sur  $(BC), (CA)$  et  $(AB)$  ; ce sont les pieds des hauteurs  $(AH_A), (BH_B)$  et  $(CH_C)$ .
- \*  $h_A = AH_A, h_B = BH_B, h_C = CH_C$ .

### 2. RELATIONS FONDAMENTALES

Un astérisque (\*) signifie qu'il y a 2 autres relations qui s'obtiennent par permutation des points.

Inégalité triangulaire (qui est une CNS d'existence du triangle) :

$$|b - c| < a < b + c \quad (*) \quad \boxed{1}$$

$$A + B + C = \pi \quad \boxed{2}$$

d'où

$$\boxed{3} \quad \begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \\ \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1 \end{cases}$$

$$a = b \cos C + c \cos B \quad (*) \quad \boxed{4}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (*) \quad \boxed{5} \quad \text{(formule d'Al Kashi)}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (*) \quad \boxed{6} \quad \text{(formule de Héron)}$$

$$S \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} ah_a \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \boxed{7}$$

La loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} \quad \boxed{8}$$

Les formules de la médiane :

|   |  |
|---|--|
| 9 | $b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2AI_A^2 \quad (*)$ $b^2 - c^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{H_A I_A} \quad (*)$ |
|---|--|

Indications de démonstration :

- 1 Utiliser les conditions d'intersection de 2 cercles.
- 2 Considérer la figure :

- 4 Projeter sur  $(BC)$ .
- 5 Résoudre en  $\cos A$  le système obtenu dans 4 ou calculer  $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$ .
- 6 Utiliser  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ .
- 7 Pour la première égalité, considérer la figure :

Pour la deuxième égalité, utiliser  $\sin A = \frac{h_B}{c} = \frac{2S}{bc}$  ou bien

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI_A} \wedge \overrightarrow{BC}.$$

- 8 Se déduit de 7.

- 9 Utiliser  $b^2 = (\overrightarrow{AI_A} + \overrightarrow{I_A C})^2$  et  $c^2 = (\overrightarrow{AI_A} + \overrightarrow{I_A B})^2$ .

### 3. TRIANGLES ISOCÈLES

PROP  $A = B \Leftrightarrow a = b$  (utiliser 5)

DEF Un triangle est dit *isocèle* s'il a 2 cotés (ou 2 angles) égaux, *équilatéral*, s'il a trois côtés égaux (donc 3 angles de mesure  $\frac{\pi}{3}$ ).

### 4. TRIANGLES RECTANGLES

PROP :  $A = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$  (théorème de Pythagore)

DEF Un triangle est dit *rectangle* s'il a un angle droit.

### 5. CAS D'ÉGALITE DES TRIANGLES

On devrait dire cas d'*isométrie* des triangles.

PROP : pour  $ABC$  et  $A'B'C'$  2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

- a.  $\exists f \in Is(P) \ / \ f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$
- b.  $a = a', b = b', c = c'$
- c.  $A = A', b = b', c = c' \ **$
- d.  $A = A', B = B', c = c' \ **$

Dans le temps on disait, 2 triangles sont égaux s'ils ont 3 côtés correspondants égaux, ou 2 côtés égaux et un angle égal ou 2 angles égaux et un coté égal.

Indication : démontrer  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$ .

Les 3 dernières implications utilisent les formules 5 ; pour  $4. \Rightarrow 1$ .

utiliser la rotation  $r$  telle que  $r(A) = A'$  et  $\vec{r}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$  et composer

éventuellement avec une symétrie.

## 6. CAS DE SIMILITUDE DES TRIANGLES

PROP : pour  $ABC$  et  $A'B'C'$  2 triangles, les propositions suivantes sont équivalentes :

a.  $\exists f \in \text{Sim}(P) / f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

b.  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

c.  $A = A', B = B', C = C'$

Indication : prouver  $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$  (utiliser les formules 5) ; pour  $(c) \Rightarrow (a)$ , utiliser les cas d'égalité.

## 7. POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE

a. Les médianes sont concourantes au *centre de gravité*  $G$  de  $ABC$ . On a  $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI_A}$  ;  $G$  est aussi le point rendant minimum la fonction scalaire de Leibniz :

$$f(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2$$

b. Les trois hauteurs sont concourantes en l'*orthocentre* du triangle ; utiliser par exemple :

$$\forall X \in P \quad \vec{AX} \cdot \vec{BC} + \vec{BX} \cdot \vec{CA} + \vec{CX} \cdot \vec{AB} = 0$$

c. Centre du cercle circonscrit.

i. Il existe un unique point  $O$  équidistant des trois sommets ; c'est le point de concours des médiatrices des trois côtés, et c'est le centre du cercle circonscrit ( $C$ ) au triangle ; on appelle  $A', B', C'$  les points diamétralement opposés à  $A, B, C$ .

ii. Sachant que  $\widehat{(B'B, B'C)} = A$  (théorème de l'arc capable) montrer que  $\sin A = \frac{a}{2R}$  d'où :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \boxed{10}$$

$$abc = 4RS \quad \boxed{11}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad \boxed{12}$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad \boxed{13}$$

iii.  $O$  est l'orthocentre du triangle  $I_A I_B I_C$ .

iv.  $I_A$  est le milieu de  $[A'H]$  (\*)

v. Les symétriques orthogonaux de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent au cercle circonscrit.

(Indication : si  $s$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $(BC)$  montrer que  $Hs(O) = R$  et regarder  $\vec{s}(\overrightarrow{Hs(O)})$ , ou bien montrer que  $\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(HC, HB)} = \widehat{(s(H)B, s(H)C)}$ ).

d. Centre du cercle inscrit.

i. Il existe un unique point  $I$  équidistant de  $(AB), (BC), (CA)$  ; ce point est le point de concours des 3 bissectrices intérieures des angles géométriques du triangle ; appelons  $U, V, W$  les projetés orthogonaux de  $I$  sur les côtés  $[BC], [CA], [AB]$  ; on pose  $IU = IV = IW = r$  ; le cercle  $(c)$  de centre  $I$  et de rayon  $r$  est le *cercle inscrit dans le triangle*.

ii. En ajoutant les aires des triangles  $BIC, CIA$  et  $AIB$ , montrer que

$$S = pr \quad \boxed{14}$$

iii. Montrer que  $AV = AW = p - a$  (\*) (poser  $x = AV, y = BU$  et  $z = CW$  et calculer  $x + y, y + z, z + x$ )

iv. En déduire  $AI^2$  en fonction  $a, b, c$ .

v. Soient  $X, Y, Z$  les pieds des bissectrices issues de  $A, B, C$  sur les côtés opposés ; montrer que

$$\frac{XB}{c} = \frac{XC}{b} = \frac{a}{b+c}$$

(utiliser  $\boxed{10}$  dans  $ABX$  et  $ACX$ ).

### 8. LIENS ENTRE $O, G$ et $H$ . CERCLE DES 9 POINTS

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $G$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  ; quel est le transformé du triangle  $ABC$  ? En utilisant le c. du VII. 3. montrer que  $h(H) = O$  et en déduire le fait que  $O, G$  et  $H$  sont alignés : leur droite commune s'appelle la droite d'Euler du triangle. Montrer  $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ .

Soit  $(C') = h((C))$  ; montrer que son centre  $\Omega$  est le milieu de  $[OH]$  et son rayon  $\frac{R}{2}$  ; montrer que l'homothétie  $h'$  de centre  $H$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  transforme aussi  $(C)$  en  $(C')$ . En déduire que  $(C')$  passe par :

- les pieds des médianes du triangle  $ABC$
- les pieds des hauteurs
- les milieux des segments joignant chaque sommet à l'orthocentre.  $(C')$  s'appelle le *cercle d'Euler* ou *cercle des 9 points* du triangle  $ABC$ .

### 9. COORDONNÉES BARYCENTRIQUES DE CES POINTS REMARQUABLES.

a. Démontrer que

$$\forall M \in P \quad \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM})\overrightarrow{AM} + \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AM})\overrightarrow{BM} + \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$

En déduire que les coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère  $(A, B, C)$  sont

$$\begin{array}{|l} \text{aire}(MBC) \\ \text{aire}(MCA) \\ \text{aire}(MAB) \end{array}$$

(il s'agit des aires "algébriques").

**b.**  $G$  a pour coordonnées barycentriques  $\begin{array}{|l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$ . En déduire 3 triangles

ayant la même aire.

**c.**  $I$  a pour coordonnées barycentriques  $\begin{array}{|l} \sin A \\ \sin B \\ \sin C \end{array}$  ou  $\begin{array}{|l} a \\ b \\ c \end{array}$  (utiliser 1. et la formule 10 ou bien utiliser 7. (d).v.

**d.**  $O$  a pour coordonnées barycentriques  $\begin{array}{|l} \sin 2A \\ \sin 2B \\ \sin 2C \end{array}$  ou  $\begin{array}{|l} a \cos A \\ b \cos B \\ c \cos C \end{array}$  (utiliser  $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = R^2 \sin 2A$ ).

**e.**  $H$  a pour coordonnées barycentriques  $\begin{array}{|l} \tan A \\ \tan B \\ \tan C \end{array}$  ou  $\begin{array}{|l} a/\cos A \\ b/\cos B \\ c/\cos C \end{array}$  (utiliser  $\overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{HG}$ )