Etude d'une variante de la spirale de Théodore, donnant naissance à une suite dont les sommes partielles sont égales aux produits partiels.
Mots clés : spirale de Théodore, théorème de Pythagore, suite, série, polynôme.

La spirale de Théodore bis, et la suite « somme=produit ».

1. Le problème.

L'exercice « de ci de là » N° 514-4 a éveillé ma curiosité, et je souhaite vous faire partager quelques petits compléments, notamment sur une étonnante suite dont la somme est égale au produit.

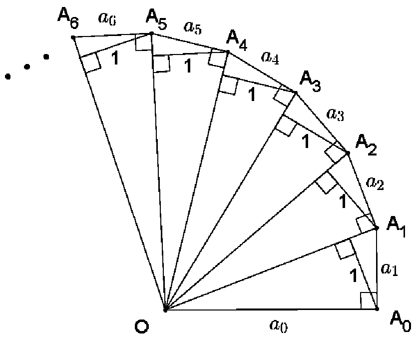


figure 1

Voici l'énoncé :
Dans le simili-escargot de Pythagore ci-dessus, les hauteurs relatives aux hypoténuses mesurent une unité.
Les a_k désignent les mesures des segments.

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \prod_{k=1}^{n} a_k^2$.

Voici une solution :
Posant $\rho_n = OA_n$, Pythagore dans le triangle $\left(OA_{n-1}A_n\right)$ nous dit : $\rho_n{}^2 = \rho_{n-1}^2 + a_n^2$, ce dont on déduit, en itérant : $\rho_n{}^2 = \rho_0^2 + a_1^2 + ... + a_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + ... + a_n^2$.
Mais la hauteur de longueur 1 découpe deux triangles dont la somme des aires est égale au tout. En multipliant par 2 on obtient : $\rho_n = \rho_{n-1} a_n$, ce qui donne, en itérant :
$\rho_n = \rho_0 a_1 ... a_n = a_0 a_1 ... a_n$.

On en déduit bien que $\rho_n^2 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \prod_{k=1}^{n} a_k^2}$.

2. La suite « somme = produit ».

La suite $\left(a_n^2\right)$ est donc telle que ses sommes partielles sont égales à ses produits partiels !

Voyons si l'on peut définir cette suite indépendamment de la géométrie.

On voit tout de suite que si l'on veut une suite à termes >0, il faut partir d'un $u_0 = a > 1$.

Supposons maintenant que $u_0, u_1, \dots, u_n$ soient construits avec $s_k = \sum_{i=0}^{k} u_i = p_k = \prod_{i=0}^{k} u_i$ tous >1 pour k entre 0 et n. Alors $s_{n+1} = p_{n+1}$ donne $s_n u_{n+1} = s_n + u_{n+1}$, soit $u_{n+1} = \frac{s_n}{s_n - 1} > 0$ et on aura bien $s_{n+1} = p_{n+1} > 1$.

Pour un premier terme >1, il existe donc une unique suite « somme=produit » définie par récurrence forte par $\boxed{u_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_K}{\sum_{k=1}^{n} u_K - 1}}$.

La fonction Maple :

```
u:=n->if n=0 then a else s:=add(u(k),k=0..n-1):
return(simplify(s/(s-1))) fi;
```

nous donne ses premiers termes : $\boxed{\left(a, \frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a^2-a+1}, \frac{a^4}{a^4-a^3+2a^2-2a+1}, \dots\right)}$.

Remarquons que dans le programme ci-dessus, on peut donc remplacer add par mul !
Cependant, le logiciel va ramer un peu plus pour les simplifications.

Maintenant, la définition par récurrence forte d'une suite peut souvent être ramenée à une définition par récurrence simple. Par exemple, $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} u_k$ nous donne tout de suite $u_{n+1} = 2u_n$. Ici, c'est un peu plus complexe, mais on va y arriver.

En effet il suffit d'éliminer s_n entre les relations $s_n + u_n = s_n u_n$ et $s_n + u_n + u_{n+1} = s_n u_n u_{n+1}$.

On obtient $\boxed{u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n + 1}}$, valable seulement pour $n \geq 1$.

D'où une fonction Maple plus simple :

```
u:=n->if n=0 then a elif n=1 then a/(a-1) else
simplify(u(n-1)^2/(u(n-1)^2-u(n-1)+1)) fi;
```

L'étude facile de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$ sur $[1, +\infty[$ nous permet de conclure que la suite (u_n) décroît et tend vers 1 à l'infini, quel que soit son point de départ.

De plus, l'examen des premiers termes nous laisse penser que u_n est le quotient de $a^{2^{n-1}}$ par un polynôme en a.

Posons donc $P_n(a)=\dfrac{a^{2^{n-1}}}{u_n}$, et injectons dans la relation $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{u_n^2-u_n+1}$. On obtient $\boxed{P_{n+1}(a)=a^{2^n}-a^{2^{n-1}}P_n(a)+P_n^{\,2}(a)}$, ce qui nous permet de démontrer par récurrence que $u_n=\dfrac{a^{2^{n-1}}}{P_n(a)}$ où P_n est un polynôme unitaire à coefficients entiers de degré 2^{n-1}.

Je ne sais pas si cette suite de polynômes est connue, mais j'ai rentré les premiers termes de la suite $\left(P_n(2)\right)$ dans l'encyclopédie des suites entières et suis tombé sur la A100441 définie comme suit :

Consider the sequence of fractions f(n) defined by: f(1) = 2/1; f(n+1) is chosen so that f(n+1) + Sum_{i=1..n} f(i) = f(n+1) * Product_{i=1..n} f(i); sequence gives denominator of f(n).

C'est bien notre suite avec *a* = 2 ! J'ai essayé les valeurs de *a* suivantes et j'ai constaté qu'un certain Martin Renner a rentré le 30 avril 2013 dans l'encyclopédie toutes les suites $P_n(a)$ pour *a* de 3 à 10…

Mais, à propos, le fait que « sequence gives denominator of f(n)" implique que la fraction $\dfrac{a^{2^{n-1}}}{P_n(a)}$ est irréductible pour *a* = 2. En effet, ceci est assurément vrai si *a* est premier ; la relation $P_{n+1}(a)=a^{2^n}-a^{2^{n-1}}P_n(a)+P_n^{\,2}(a)$ montre dans ce cas que puisqu'on part de $P_1(a)=a-1$, $P_n(a)$ n'est jamais divisible par *a*.

3. La spirale de Théodore bis.

Mais revenons à notre escargot. Si l'on trace un peu plus de points, on obtient cette spirale :

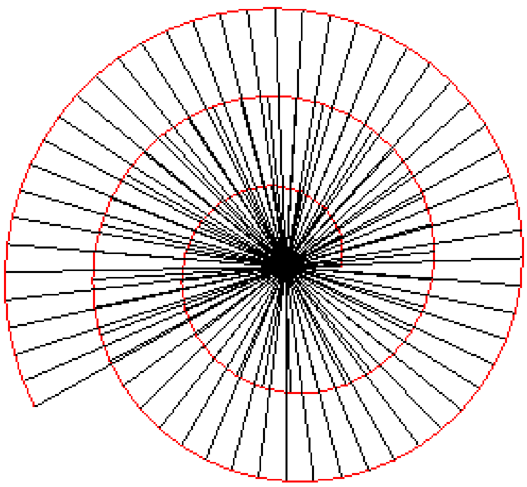


figure2

Elle ressemble à une spirale d'Archimède, regardons cela de plus près.
Calculons pour cela les coordonnées polaires de A_n.

Avec $a_0 = a$, on a donc $a_n = \sqrt{u_n}$, et on a vu que $\rho_n = aa_1 ... a_n$; cette expression n'étant pas pratique, refaisons un peu de géométrie.
Soit H_n le pied de la hauteur issue de A_{n-1} dans le triangle $(OA_{n-1}A_n)$; ayant un angle en commun, les triangles rectangles $(OA_{n-1}A_n)$, (OH_nA_{n-1}) sont semblables donc : $\frac{\rho_{n-1}}{a_n} = \frac{OH_n}{1} = \sqrt{\rho_{n-1}^2 - 1}$, d'où $a_n = \frac{\rho_{n-1}}{\sqrt{\rho_{n-1}^2 - 1}}$, et $\boxed{\rho_n} = \rho_{n-1}a_n \boxed{= \frac{\rho_{n-1}^2}{\sqrt{\rho_{n-1}^2 - 1}}}$. De nouveau une suite récurrente simple.
L'angle $\alpha_n = A_{n-1}OA_n$ vérifie $\sin \alpha_n = \frac{a_n}{\rho_n} = \frac{1}{\rho_{n-1}}$; donc l'angle polaire de A_n est $\boxed{\theta_n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \arcsin \frac{1}{\rho_k}}$.
Etudions plus avant la suite (ρ_n), visualisée ci-dessous :

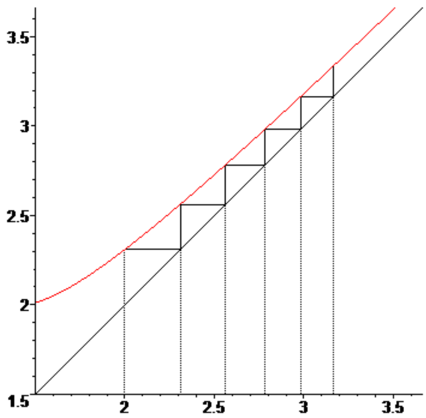


figure 3

Elle tend clairement vers l'infini, et la relation $\rho_{n+1}^2 = \frac{\rho_n^4 - 1 + 1}{\rho_n^2 - 1} = \rho_n^2 + 1 + \frac{1}{\rho_n^2 - 1}$ montre que $\rho_{n+1}^2 - \rho_n^2$ tend vers 1 et que donc (Césaro) $\rho_n^2 \sim n, \boxed{\rho_n \sim \sqrt{n}}$.

On a donc $\alpha_n = \arcsin \frac{1}{\rho_n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, et par la règle de sommation des équivalents $\boxed{\theta_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \arcsin \frac{1}{\rho_k} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \boxed{2\sqrt{n}}$, donc $\boxed{\rho_n \sim \frac{\theta_n}{2}}$: la spirale est bien du type « Archimède » (l'appellation « escargot » est donc inadéquate, car le gastéropode a une coquille en spirale du type logarithmique !).

Cherchons s'il y a une spirale d'Archimède asymptote, c'est-à-dire si $\rho_n - \frac{\theta_n}{2}$ possède une limite finie.

Ecrivons $\rho_n - \frac{\theta_n}{2} = \rho_n - \sqrt{n} + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \arcsin \frac{1}{\rho_k}\right) + \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_n}$.

La convergence de $2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ vers $-\zeta(1/2)$ est bien connue.

Pour les deux autres termes, il va falloir affiner le développement asymptotique de ρ_n.

Si on pose $v_n=\rho_n^2-n$, la récurrence sur v_n s'écrit $v_{n+1}=v_n+\frac{1}{n+v_n-1}$; donc $v_{n+1}-v_n\sim\frac{1}{n}$ et $v_n\sim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$; donc $\rho_n=\sqrt{n+\ln n+o(\ln n)}=\sqrt{n}+\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$.

Donc $\rho_n-\sqrt{n}\to 0$, et $\frac{1}{\sqrt{n}}-\arcsin\frac{1}{\rho_n}\sim\frac{\ln n}{2n^{3/2}}$, terme général d'une série de Bertrand convergente.

Il y a donc bien une spirale d'Archimède asymptote !

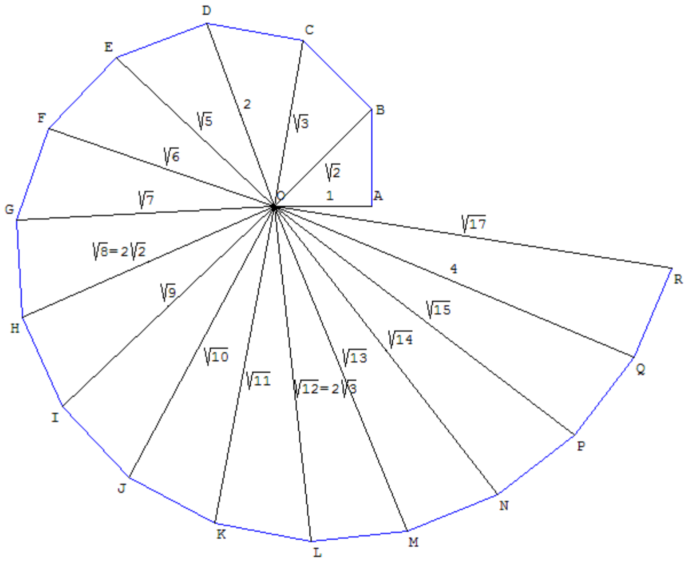
4. La spirale de Théodore classique.

Il faut dire que si mon attention a été attirée par cet énoncé, c'est parce que je venais de corriger dans mon site mathcurve.com une erreur qui y était restée plus de 10 ans.

Dans la spirale de Théodore classique ce ne sont pas les hauteurs A_nH_n qui valent 1, mais les côtés A_nA_{n+1}. Or j'avais confondu avec une troisième version où ce sont les angles (A_nOA_{n+1}) qui sont égaux. Ce qui est remarquable, c'est que dans ce cas, la spirale est du type logarithmique !

La spirale de Théodore classique est aussi du type « Archimède », et la démonstration est du même ordre que celle que nous venons de faire, en plus facile car on a cette fois $\rho_n=\sqrt{n}$.

Rappelons d'ailleurs qu'on attribue à Théodore de Cyrène la construction de cette spirale de manière tout à fait indirecte : ce mathématicien du Vème siècle avant J.C. s'était arrêté à $\sqrt{17}$ dans sa démonstration de l'incommensurabilité des racines carrées d'entier, or 17 est justement la dernière étape avant que la spirale ne repasse sur elle-même, comme on voit ci-dessous :



(figure 4 : source : wikipedia)

5. Des références.

J'ai essayé de rechercher qui a eu l'idée de la spirale de Théodore bis.
Le problème du bulletin est tiré du crux mathematicorum canadien volume 30 de 2003, problème M114. Il est indiqué : proposé par Seyamack Jafari, Iran. On trouve cette personne sur linkedin, mais je n'ai pas réussi à la contacter.
Appel aux lecteurs du bulletin !
D'autre part, la suite ρ_n en partant de *a* = 2, possède des numérateurs entiers qui se trouvent dans l'encyclopédie des suites entières sous le numéro A076628.
La suite $\sigma_n = 1/\rho_n$ vérifie la récurrence plus simple $\sigma_{n+1} = \sigma_n - \sigma_n^2$ (elle se trouve depuis longtemps dans mes exercices sur les suites !) que l'encyclopédie désigne sous le nom de « Somos-Rusin recursion ». On trouve en effet la référence http://www.math.niu.edu/Papers/Rusin/known-math/99/somos qui regroupe un échange de mails entre les deux hommes durant l'année 1999 au sujet de cette suite.
On y trouve le résultat complétant le développement asymptotique ci-dessus :

$$\rho_n = n + \ln n + c + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad \text{où } c = 0{,}767994....$$

Merci, donc, aux exercices de ci de là d'avoir initié cette balade dans la géométrie du triangle rectangle, les suites, les séries, les polynômes, et même un soupçon d'arithmétique !