Le théorème de Zeckendorf

Démonstration de Vincent Granger,

PCSI 2006

On note (F_n) la suite de Fibonacci $(F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n)$

TH : tout entier $k \geqslant 1$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{i=2}^{N} a_i F_i$ où les a_i sont égaux à 0 ou 1, et $a_i a_{i+1} = 0$ pour tout $i \in [2, N-1], a_N \neq 0$.

Une telle décomposition sera appelée une N-décomposition fibonaccienne de k.
De plus, l'entier N est l'indice du plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à k.

1. Preuve de l'existence de la décomposition.

Montrons par récurrence l'énoncé pour tout $n \geqslant 3$:
$P(n)$: tout entier de $[1, F_{n+1}[$ possède une N-décomposition fibonaccienne avec $N \leqslant n$.
.

▲ $P(2)$ est évident car $F_2 = 1, F_3 = 2$, et supposons $P(n-1)$ pour un $n \geqslant 3$; pour obtenir $P(n)$ il nous suffit de décomposer les entiers de $[F_n, F_{n+1}[$.
Or si $F_n \leqslant k < F_{n+1}$, on a $0 \leqslant k - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$, donc par hypothèse de récurrence, on a la décomposition fibonaccienne $k - F_n = \sum_{i=2}^{N} a_i F_i$ avec $N \leqslant n-1$. Mais il est impossible que $N = n-1$ car sinon on aurait $k - F_n \geqslant F_{n-1}$ et par conséquent :

$$k = \sum_{i=2}^{N} a_i F_i + F_n$$

ce qui fournit bien une décomposition demandée de k.▼

2. LEMME : si les a_i sont égaux à 0 ou 1, et $a_i a_{i+1} = 0$ pour tout $i \in [2, n-2]$, on a, pour tout $n \geqslant 3$:

$$Q(n) : \quad \sum_{i=2}^{n-1} a_i F_i < F_n$$

▲$Q(3)$ et $Q(4)$ sont vrais, et supposons $Q(n-1)$ et $Q(n)$; il nous faut démontrer, avec les bonnes hypothèses sur les a_i que

$$\sum_{i=2}^{n} a_i F_i < F_{n+1}$$

Si $a_n = 0$, on a bien : $\sum_{i=2}^{n} a_i F_i = \sum_{i=2}^{n-1} a_i F_i < F_n < F_{n+1}$, en utilisant $Q(n)$.

Si $a_n = 1$, $\sum_{i=2}^{n} a_i F_i = F_n + \sum_{i=2}^{n-2} a_i F_i < F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, en utilisant $Q(n-1)$.▼

3. Preuve de l'unicité.

▲Supposons que k ait deux décompositions fibonaccienne :

$$k = \sum_{i=2}^{N} a_i F_i = \sum_{i=2}^{N} b_i F_i$$

Comme $k = \sum_{i=2}^{N-1} a_i F_i + a_N F_N = a_N F_N + r$ avec $0 \leqslant r < F_N$ d'après le lemme, a_N est le quotient de la division de k par F_N, et b_N également, donc $a_N = b_N$; en retirant $a_N F_N$ on obtient $a_{N-1} = b_{N-1}$, etc. jusqu'à $a_2 = b_2$.▼

En plus, ceci donne la méthode de décomposition : retirer à k le plus grand nombre de Fibonacci qui lui soit inférieur, et recommencer avec la différence (algorithme glouton).

Par exemple, sachant que les premiers nombres de Fibonacci sont :
1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584
$\boxed{2006} = 1597 + 409 = 1597 + 377 + 32 = 1597 + 377 + 21 + 11 = \boxed{3 + 8 + 21 + 377 + 1597}$