C) COMPLÉMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

I) PROJECTEURS ET INVOLUTIONS.

1) Projecteurs.

DEF : un *projecteur* d'un espace vectoriel E est un endomorphisme égal à son carré :

$$p \text{ projecteur de } E \Leftrightarrow \begin{cases} p \in L(E) \\ p^2 (= p \circ p) = p \end{cases}$$

Les projections vectorielles définies précédemment sont évidemment des projecteurs ; mais la réciproque est vraie :

PROP : Tout projecteur p de l'espace vectoriel E est une projection de base $\operatorname{Im} p = \ker(p - id_E)$ et de direction $\ker p = \operatorname{Im}(p - id_E)$.

D1

Les mots "projecteur" ou "projection (vectorielle)" peuvent donc être employés de manière équivalente.

2) Involutions linéaires.

DEF : une application d'un ensemble E dans lui-même est dite *involutive* si son carré est égal à l'application identité ; une application involutive est apelée une *involution* :

$$s \text{ involution de } E \Leftrightarrow \begin{cases} s \in E^E \\ s^2 = id_E \end{cases}$$

Les symétries vectorielles définies précédemment sont évidemment des involutions linéaires (ou, ce qui revient au même, des endomorphismes involutifs) ; mais la réciproque est vraie :

PROP : Tout involution linéaire s de l'espace vectoriel E est une symétrie de base $\ker(s - id_E) = \operatorname{Im}(s + id_E)$ (ensemble des vecteurs invariants) et de direction $\ker(s + id_E) = \operatorname{Im}(s - id_E)$ (ensemble des vecteurs anti-invariants).

D2

Les mots "symétrie (vectorielle)" ou "involution linéaire" peuvent donc être employés de manière équivalente (mais le premier est plus court !).

REM : les projecteurs et les symétries sont reliés par les relations :

s symétrie $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(s + id_E)$ projecteur
p projecteur $\Leftrightarrow 2p - id_E$ symétrie

D3

Exemples à bien connaître :

- l'application S de K^K dans lui-même qui à f fait correspondre $S(f)$ définie sur I par $(S(f))(x) = f(-x)$ est une symétrie de base l'espace des fonctions .... et de direction l'espace des fonctions ....
- l'application T de $M_n(K)$ dans lui-même qui à toute matrice fait correspondre sa transposée est une symétrie de base l'espace des matrices .... et de direction l'espace des matrices ....

E1

II) FORMES LINÉAIRES.

DEF : E $K-$espace vectoriel ; une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E vers K.

L'ensemble des formes linéaires sur E est parfois noté E^* plutôt que $L(E, K)$.

Exemples : E2

PROP : si E est de dimension finie n, $L(E, K)$ est aussi de dimension n et est donc isomorphe à E.

D4

PROP : une forme linéaire sur E non nulle est surjective et son noyau est un hyperplan de E.

Réciproquement, tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

D5

PROP : f est une forme linéaire sur K^n ss'il existe $a_1, a_2, ..., a_n$ dans K tels que

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

et $[a_1, a_2, ..., a_n]$ n'est autre que la matrice canonique de f.
D6

III) MATRICES CARRÉES SEMBLABLES.

DEF : deux matrices carrées sont dites *semblables* si ce sont les matrices du même endomorphisme (en prenant les mêmes bases pour le départ et l'arrivée).

Autrement dit, si A et $A' \in M_n(K)$, A et A' sont semblables s'il existe E de dimension n, $f \in L(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E, tels que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

PROP : A et A' sont semblables (parfois noté $A \sim A'$) $\Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(K)\ /\ A' = P^{-1}AP$.

D7
PROP : semblables $\Rightarrow$ équivalentes (donc de mêmes rangs) MAIS LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE.
D8
Exemples : E2

Quelques propriétés :

* la relation de similitude des matrices est une relation d'équivalence.
* $A \sim A'$ et $Q \in K[X] \Rightarrow Q(A) \sim Q(A')$
* $A \sim A'$ et A inversible $\Rightarrow A'$ inversible et $A^{-1} \sim A'^{-1}$
* $A \sim A'$ implique $\text{tr}(A) = \text{tr}(A')$, réciproque fausse.

D9

IV) SOMMES DIRECTES DE PLUSIEURS SOUS-ESPACES.

DEF : soient $F_1, ..., F_p$ p sous-espaces vectoriels de E ; on dit que les F_i sont *en somme directe* (ou qu'ils sont *globalement indépendants*) si chacun est en somme directe avec la somme des $p-1$ autres, autrement dit,

$$\forall i \ \ F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{\overrightarrow{0_E}\}$$

La somme $F_1 + ... + F_p$ est alors notée $F_1 \oplus ... \oplus F_p$ ou $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\oplus} F_i$.

REM : cette définition concorde bien avec le cas $p = 2$.

CNS1 : les F_i sont en somme directe $\Leftrightarrow$

$$\forall (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \in F_1 \times ... \times F_p \quad \overrightarrow{x}_1 + ... + \overrightarrow{x}_p = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0} \ \ \forall i$$

D10
Dont on déduit la CNS2 : (principe d'identification) :
les F_i sont en somme directe $\Leftrightarrow$

$$\forall (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p), (\overrightarrow{y}_1, ..., \overrightarrow{y}_p) \in F_1 \times ... \times F_p \quad \overrightarrow{x}_1 + ... + \overrightarrow{x}_p = \overrightarrow{y}_1 + ... + \overrightarrow{y}_p \Rightarrow \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{y} \ \ \forall i$$

Cette CNS équivaut a la
CNS3 (unicité de la décomposition) : les F_i sont en somme directe $\Leftrightarrow$

$$\forall \overrightarrow{y} \in F_1 + ... + F_p \ \ \exists! (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \in F_1 \times ... \times F_p \ \ / \ \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}_1 + ... + \overrightarrow{x}_p$$

D11
PROP : en dimension finie, $\dim(F_1 \oplus ... \oplus F_p) = \dim F_1 + ... + \dim F_p$.
D12

ATTENTION À LA CROYANCE FAUSSE TRÈS RÉPANDUE QU'UNE SOMME EST DIRECTE QUAND L'INTERSECTION DES SOUS-ESPACES EST RÉDUITE À ZÉRO.

Par exemple trois droites dans un plan peuvent très bien être d'intersection nulle, mais leur somme ne peut être directe.

Ce même exemple montre que même si les sous-espaces sont deux à deux d'intersection nulle, la somme n'est pas forcément directe (autrement dit l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance globale).

REM : il ya une CNS4 qui montre le lien avec les familles libres :
les F_i sont en somme directe $\Leftrightarrow$

$$\forall(\overrightarrow{x}_1,...,\overrightarrow{x}_p) \in F_1\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\} \times ... \times F_p\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\} \ \ (\overrightarrow{x}_1,...,\overrightarrow{x}_p) \text{ est libre}$$

V) RETOUR SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Le système (S) : $\left\{\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,...,n\right.$ peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = B$, avec

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & a_{1p} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & . & . & a_{np} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si donc f_A est l'application linéaire canonique associée à A (de $M_{p,1}(K) \approx K^p$ vers $M_{n,1}(K) \approx K^n$), l'ensemble des solutions de (S) n'est autre que $f_A^{-1}(B)$ et l'ensemble des solutions du système homogène associé est $\ker f_A$.

DEF : le rang r du système est le rang de A (donc de f_A).
PROP : Si $B \notin \operatorname{Im} f_A$ le système est incompatible, sinon, l'ensemble des solutions S est un translaté de $\ker f_A$.

Sa dimension est l'ordre de l'indétermination ; elle vaut $p - r$ (théorème du rang).
D13
PROP : le rang qui avait été défini au début du cours d'algèbre linéaire par le nombre d'équations principales est bien le rang défini ci-dessus.
D14

Remarque : on adopte pour les équations du système le vocabulaire (indépendance, liberté) correspondant aux lignes de la matrice.
Par exemple, un système de Cramer est un système carré dont les équations sont indépendantes.