C) COMPLEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

I) PROJECTEURS ET INVOLUTIONS.

1) Projecteurs.

DEF : un *projecteur* d'un espace vectoriel E est un endomorphisme dont le carré est égal à lui-même :

$$p \text{ projecteur de } E \Leftrightarrow \begin{cases} p \in L(E) \\ p^2 (= p \circ p) = p \end{cases}$$

Les projections vectorielles définies précédemment sont évidemment des projecteurs ; mais la réciproque est vraie :

PROP : Tout projecteur p de l'espace vectoriel E est une projection de base $\operatorname{Im} p = \ker(p - id_E)$ et de direction $\ker p = \operatorname{Im}(p - id_E)$.

D1

Les mots "projecteur" ou "projection (vectorielle)" peuvent donc être employés de manière équivalente.

2) Involutions linéaires.

DEF : une application d'un ensemble E dans lui-même est dite *involutive* si son carré est égal à l'application identité ; une application involutive est apelée une *involution* :

$$s \text{ involution de } E \Leftrightarrow \begin{cases} s \in E^E \\ s^2 = id_E \end{cases}$$

Les symétries vectorielles définies précédemment sont évidemment des involutions linéaires (ou, ce qui revient au même, des endomorphismes involutifs) ; mais la réciproque est vraie :

PROP : Tout involution linéaire s de l'espace vectoriel E est une symétrie de base $\ker(s - id_E) = \operatorname{Im}(s + id_E)$ (ensemble des vecteurs invariants) et de direction $\ker(s + id_E) = \operatorname{Im}(s - id_E)$ (ensemble des vecteurs anti-invariants).

D2

Les mots "symétrie (vectorielle)" ou "involution linéaire" peuvent donc être employés de manière équivalente (mais le premier est plus court !).

REM : les projecteurs et les symétries sont reliés par les relations :

s symétrie $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(s + id_E)$ projecteur
p projecteur $\Leftrightarrow 2p - id_E$ symétrie

D3

Exemples à bien connaître :

- l'application S de K^K dans lui-même qui à f fait correspondre $S(f)$ définie sur I par $(S(f))(x) = f(-x)$ est une symétrie de base l'espace des fonctions .... et de direction l'espace des fonctions ....
- l'application T de $M_n(K)$ dans lui-même qui à toute matrice fait correspondre sa transposée est une symétrie de base l'espace des matrices .... et de direction l'espace des matrices ....

E1

II) FORMES LINÉAIRES (HORS PROGRAMME)

DEF : E $K-$espace vectoriel ; une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E vers K.

L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^* plutôt que $L(E, K)$.

Exemple : E2

PROP : si E est de dimension finie n, E^* est aussi de dimension n et est donc isomorphe à E.

D4

PROP : une forme linéaire sur E non nulle est surjective et son noyau est un hyperplan de E.

D5

PROP : f est une forme linéaire sur K^n ss'il existe $a_1, a_2, ..., a_n$ dans K tels que

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

et $[a_1, a_2, ..., a_n]$ n'est autre que la matrice canonique de f.
D6

III) MATRICES CARRÉES SEMBLABLES (HORS PROGRAMME).

DEF : deux matrices carrées sont dites *semblables* si ce sont les matrices du même endomorphisme (en prenant les mêmes bases pour le départ et l'arrivée).

Autrement dit, si A et $B \in M_n(K)$, A et B sont semblables s'il existe E de dimension n, $f \in L(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ bases de E, tels que $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f)$.

PROP : A et B sont semblables (parfois noté $A \sim B$) $\Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(K)\ /\ B = P^{-1}AP$.

D7
PROP : semblables $\Rightarrow$ équivalentes (donc de mêmes rangs) MAIS LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE.
D8
Exemples : E2

Quelque propriétés :
* la relation de similitude des matrices est une relation d'équivalence.
* $A \sim B$ et $P \in K[X] \Rightarrow P(A) \sim P(B)$
* $A \sim B$ et A inversible $\Rightarrow B$ inversible et $A^{-1} \sim B^{-1}$

D9

IV) SOMMES DIRECTES DE PLUSIEURS SOUS-ESPACES

DEF : $F_1, ..., F_p$ p sous-espaces vectoriels de E ; on dit que les F_i sont *en somme directe* (ou qu'ils sont *globalement indépendants*) si chacun est en somme directe avec la somme des $p-1$ autres, autrement dit,

$$\forall i\ \ F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{\overrightarrow{0_E}\}$$

La somme $F_1 + ... + F_p$ est alors notée $F_1 \oplus ... \oplus F_p$ ou $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\oplus} F_i$.

REM : cette définition concorde bien avec le cas $p = 2$.
CNS1 : les F_i sont en somme directe $\Leftrightarrow$

$$\forall (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \in F_1 \times ... \times F_p \quad \overrightarrow{x}_1 + ... + \overrightarrow{x}_p = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0}\ \ \forall i$$

D10
CNS2 : les F_i sont en somme directe $\Leftrightarrow$

$$\forall \overrightarrow{y} \in F_1 + ... + F_p\ \ \exists! (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \in F_1 \times ... \times F_p\ \ /\ \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}_1 + ... + \overrightarrow{x}_p$$

D11
PROP : en dimension finie, $\dim(F_1 \oplus ... \oplus F_p) = \dim F_1 + ... + \dim F_p$.
D12

ATTENTION À LA CROYANCE FAUSSE TRÈS RÉPANDUE QU'UNE SOMME EST DIRECTE QUAND L'INTERSECTION DES SOUS-ESPACES EST RÉDUITE À ZÉRO.

Par exemple trois droites dans un plan peuvent très bien être d'intersection nulle, mais leur somme ne peut être directe.

Ce même exemple montre que même si les sous-espaces sont deux à deux d'intersection nulle, la somme n'est pas forcément directe (autrement dit l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance globale).

V) RETOUR SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Le système (S) : $\left\{ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = 1, ..., n \right.$ peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = B$, avec

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & a_{1p} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & . & . & a_{np} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si donc f_A est l'application linéaire canonique associée à A (de $M_{p,1}(K) \approx K^p$ vers $M_{n,1}(K) \approx K^n$), l'ensemble des solutions de (S) n'est autre que $f_A^{-1}(B)$ et l'ensemble des solutions du système homogène associé est $\ker f_A$.

DEF : le rang r du système est le rang de A (donc de f_A).
PROP : Si $B \notin \operatorname{Im} f_A$ le système est incompatible, sinon, l'ensemble des solutions S est un translaté de $\ker f_A$.

Sa dimension est l'ordre de l'indétermination ; elle vaut $p - r$ (théorème du rang).
D13
Remarque : le rang qui avait été défini au début du cours d'algèbre linéaire par le nombre d'équations principales est bien le rang défini ci-dessus.
D14