V) FONCTIONS ET APPLICATIONS.

1) Introduction.
2) Fonctions.

DEF : une relation f de E vers F de graphe G_f est appelée une *fonction* lorsque tout élément de E possède au plus une image dans F, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E \ \ \forall y_1, y_2 \in F \quad ((x, y_1) \text{ et } (x, y_2)) \in G_f \Rightarrow y_1 = y_2$$

L'ensemble des éléments de E ayant une image par f est appelé l'*ensemble de définition* de la fonction, et noté D_f.

On utilise alors une notation fonctionnelle : l'unique image de $x \in D_f$ par f est noté $f(x)$; autrement dit :

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } y = f(x)$$

L'ensemble des fonctions de E vers F sera noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Pour définir une fonction de E vers F, on écrit :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$$

REM 1 : bien se garder de confondre la *fonction* f (qui est un élément de $\mathcal{F}(E, F)$) et la *valeur* $f(x)$ de f en x qui est un élément de F ; ne pas écrire par exemple "la fonction $\sin x$", mais "la fonction sin", ou "la fonction $x \mapsto \sin x$".

REM 2 : deux fonctions f et g de E vers F sont égales si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.\ D_f = D_g \\ 2. \forall x \in D_f \quad f(x) = g(x) \end{array} \right.$$

Pour que deux fonctions soient distinctes, il suffit donc que les valeurs en un point le soient.

Exemple de détermination d'ensemble de définition : E1.

DEF : si A est une partie de E, on appelle restriction de f à A, et on note $f_{|A}$ la fonction : $\left\{ \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$.

REM 1 : la seule chose qui distingue f et $f_{|A}$ est donc leur ensemble de départ ; leurs valeurs sur les éléments de A sont les mêmes.

REM 2 : $D_{f_{|A}} =$ ....

3) Applications.

a) Définition.

DEF : une fonction est appelée une *application* lorsque son ensemble de définition est égal à son ensemble de départ.

L'ensemble des applications de E vers F sera noté $\mathcal{A}(E, F)$.

REM : si l'on restreint une fonction de E vers F à son ensemble de départ D_f, on obtient une application de D_f vers F ; on fera souvent la confusion entre ces deux notions : par exemple, la fonction ln peut être vue comme une *application* de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, ou comme une *fonction* de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exemple d'applications de E dans F.

- les applications constantes $x \mapsto a$ où a est un élément fixé de F
- si $E = F$, l'application identique (ou identité), notée id_E, définie par $id_E(x) = x$ pour tout x dans E.

- les fonctions caractéristiques de parties :

DEF : si A est une partie de E, on définit la "fonction caractéristique de A" comme l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

b) Dénombrement des applications et fonctions.

PROP : le nombre d'applications d'un ensemble E_n de taille n vers un ensemble F_p de taille p est égal à ....

D1

On peut donc écrire dans le cas fini : $|\mathcal{A}(E,F)| = |F|^{|E|}$; c'est la raison pour laquelle on note souvent aussi $\mathcal{A}(E,F)$: F^E, même pour des ensembles infinis.

Exercice : le nombre de *fonctions* de E_n vers F_p est égal à ....

D2

4) Compositions des fonctions.

DEF : si f est une fonction de E vers F et g une fonction de F vers G, on définit la composée $g \circ f$ de f et g (noter l'inversion de l'ordre), par

$$g \circ f : \begin{cases} E \to G \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

ATTENTION : puisque

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

dans $g \circ f$, la fonction qui est effectuée en premier est f et non g !!!!
REM : l'ensemble de définition $D_{g \circ f}$ de $g \circ f$ est l'ensemble des x de D_f tels que $f(x) \in D_g$; il peut être plus petit que celui de f, mais par contre, si f et g sont des applications, $g \circ f$ aussi.

Exemples E2 :
Ensemble de définition de $\ln \circ \ln$, géométrie etc.

PROP : si $\begin{cases} f \text{ est une fonction de } E \text{ vers } F \\ g \text{ est une fonction de } F \text{ vers } G \\ h \text{ est une fonction de } G \text{ vers } H \end{cases}$, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (que l'on écrit $h \circ g \circ f$)
D3

REM : en toute rigueur, cette propriété ne peut s'appeler "associativité de la loi $\circ$" que lorsque $E = F = G$.

Notation : si f est une application de E dans E, on note f^n l'application $\underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ fois}}$ pour n entier $\geqslant 1$; par convention, on pose $f^0 = id_E$; attention, pour $E = \mathbb{R}$, cette notation est en conflit avec celle de la puissance $n-$ième ($f^n(x) = (f(x))^n$), et c'est cette dernière interprétation qui prime en général.

5) Images directes et réciproques d'une partie par une application.

DEF : soient f une application de E vers F, A une partie de E et B une partie de F ; on définit alors
- l'*image directe* de A par f, notée abusivement $f(A)$, comme l'ensemble des images des éléments de A par f (ou l'ensemble des valeurs prises par l'application sur A).
- l'*image réciproque* (ou *préimage* ou *ensemble antécédent*) de B par f, notée abusivement $f^{-1}(B)$, comme l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B.

Autrement dit :

$f(A) = \{y \in F \ / \ \exists x \in A \ / \ y = f(x)\} = \{f(x) \ / \ x \in A\}$
$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$

Par conséquent pour x dans E et y dans F:

$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \ / \ y = f(x)$
$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

NOTER QUE LA DÉFINITION DE $f^{-1}(B)$ NE NECESSITE PAS L'EXISTENCE D'UNE RÉCIPROQUE POUR f ;

CE QU'ON NE VEUT PAS VOIR : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ avec y dans B ; la bonne définition n'est-elle pas nettement plus simple ?

E3 : sur un diagramme sagittal, pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en géométrie, pure ou analytique.

REM : si B est un singleton $\{y\}$, on simplifie la notation $f^{-1}(\{y\})$ en $f^{-1}(y)$; c'est l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) = y\}$ de tous les antécédents de y par f.

Propriétés ; les lettres A, B, C désignent des parties respectives de E, F, G ; $f \in \mathcal{A}(E, F), g \in \mathcal{A}(F, G)$, :

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$	1'. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
2. $f\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$	2'. $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
3. $\boxed{f\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)}$	3'. $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$
4. $\boxed{f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)} \cap f(E)}$	4'. $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$
5. $\boxed{f^{-1}(f(A)) \supset A}$	5'. $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$
6. $gof(A) = g(f(A))$	6'. $(gof)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$

Moralité : c'est toujours égal, sauf dans les trois cas encadrés.

D4

6) Restrictions d'une application.

DEF : si f est une application de E vers F, A une partie de E et B une partie de F incluant $f(A)$, alors on définit la restriction de f à A et B , notée $f|_A^B$ par $\left\{\begin{array}{c} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array}\right.$. Si $A = E$, la notation est réduite à $f^{|B}$, et si $B = F$, elle est réduite à $f_{|A}$, comme vu plus haut.

7) Injectivité.

a) Définition.

DEF : Une application f de E vers F est dite *injective* si les éléments de F ont *au plus* un antécédent par f ; ceci se traduit par

$$\boxed{1. \ \forall y \in f(E) \ \ \exists! x \in E \ / \ y = f(x)}$$

ou encore, puisque seule l'unicité importe :

$$\boxed{2. \ \forall x, x' \in E \ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'}$$

ce qui par contraposée donne :

$$\boxed{3. \ \forall x \neq x' \in E \ \ f(x) \neq f(x')}$$

Pour prouver pratiquement une injectivité, utiliser la CNS 2.

Une application injective est appelée une *injection*.

REM : si f est une fonction de E vers F et I une partie de D_f, on dira que f est *injective sur* I si la restriction de f à I est injective, autrement dit si $\forall x, x' \in I \ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

On rappelle qu'une fonction numérique strictement monotone sur une partie I de $\mathbb{R}$ y est injective, MAIS QUE LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE (voir cours sur les fonctions réciproques).

Exemples : E3.

b) Fonction réciproque.

DEF : si f est une fonction de E vers F injective sur I, on définit la fonction réciproque $f_{|I}^{-1}$ de f sur I comme la fonction de F vers E définie sur $J = f(I)$ qui à y de J fait correspondre l'antécédent de y par f.

On a donc

$$y = f(x) \text{ avec } x \in I \Leftrightarrow x = f_{|I}^{-1}(y) \text{ avec } y \in J$$

Si $I \supset D_f$, on écrit simplement f^{-1}.

Ex : $\arcsin = \left(\sin_{|..........}\right)^{-1}$, $\arccos = \left(\cos_{|..........}\right)^{-1}$, $\arctan = \left(\tan_{|..........}\right)^{-1}$,$\text{argch} = \left(\text{ch}_{|..........}\right)^{-1}_{..........}$.

PROP : Si f est injective, f^{-1} est aussi injective (sur $f(E)$), et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

D5

c) Dénombrement des injections.

PROP : le nombre d'injections d'un ensemble E_n de taille n vers un ensemble F_p de taille $p \geqslant n$ est égal à $p(p-1)...(p-n+1) = \dfrac{p!}{(p-n)!}$ noté $p^{\underline{n}}$ ou encore A_p^n.

D6

Remarque : le fait que

nombre d'applications de E_n vers F_p	=	nombre de listes d'ordre n formées à partir de p objets
nombre d'injections de E_n vers F_p	=	nombre d'arrangements d'ordre n formés à partir de p objets
nombre d'applications de E_n vers F_2	=	nombre de parties de E_n

N'est pas fortuit !

D7

8) Surjectivité.

DEF : Une application f de E vers F est dite *surjective* si les éléments de F ont *au moins* un antécédent par f ; ceci se traduit par

$$\boxed{1.\ \forall y \in F\ \ \exists x \in E\ \ /\ \ y = f(x)}$$

ce qui peut s'écrire tout simplement :

$$\boxed{2.\ f(E) = F}$$

Une application surjective est appelée une *surjection.*

REM : la surjectivité ne concerne que la définition de l'ensemble d'arrivée de l'application ; si l'on restreint l'ensemble d'arrivée de F à $f(E)$, l'application obtenue est surjective !

Exemples : E4.

Le dénombrements des surjections est plus difficile que celui des injections (voir exercices).

9) Bijectivité.

a) Définition.

DEF : Une application f de E vers F est dite *bijective* si les éléments de F ont *exactement* un antécédent par f , autrement dit si elle est à la fois injective et surjective ; ceci se traduit par

$$\boxed{\forall y \in F\ \ \exists! x \in E\ \ /\ \ y = f(x)}$$

Une application bijective est appelée une *bijection* ; l'ensemble des bijections de E vers F est noté $\mathcal{B}ij(E, F)$, et $\mathcal{B}ij(E)$ si $E = F$.

Une autre façon d'exprimer la condition ci-dessus, est de dire que l'équation

$$(E_y) : y = f(x)$$

D'inconnue x et de paramètre y possède une solution unique pour tout y dans F.

Lorsqu'on vous demande d'étudier l'injectivité et la surjectivité d'une application f, écrivez :

Soit $y \in F$; pour x dans E :

$$(E_y) : y = f(x) \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow .....$$

Si vous arrivez à exprimer x en fonction de y de façon unique pour tout y, c'est que f est bijective.
Si l'équation (E_y) n'a pas toujours de solution, mais que si elle existe, cette solution est unique, c'est que f est .....

Si l'équation (E_y) a toujours des solutions, mais que pour certains y elle en a plusieurs, c'est que f est ....

Si l'équation (E_y) n'a pas toujours des solutions, et que pour certains y elle en a plusieurs, c'est que f ....

Exemples : E5.

b) Bijection réciproque.

PROP : si f est une bijection de E sur F alors sa réciproque f^{-1} est une bijection de F sur E, et

$$\boxed{\begin{array}{c} f \circ f^{-1} = id_F \\ \hline f^{-1} \circ f = id_E \end{array}}$$

D8

Inversement, supposons que, f étant une application de E vers F, l'on connaisse une application g de F vers E telle que :

$$\left\{ \boxed{\begin{array}{c} f \circ g = id_F \\ \hline g \circ f = id_E \end{array}} \right.$$

alors f est bijective, et g est sa réciproque.

D9

Ceci est une deuxième façon de prouver une bijectivité, qui donne en même temps la réciproque, mais nécessite d'intuiter celle-ci à l'avance ; c'est pourquoi on appellera cette méthode la méthode "deus ex machina".

c) Cas fini.

Prop : si E est fini, f application de E vers F, alors

f est injective $\Leftrightarrow \lvert f(E) \rvert = \lvert E \rvert$
f est surjective $\Leftrightarrow \lvert f(E) \rvert = \lvert F \rvert$
f est bijective $\Leftrightarrow \lvert f(E) \rvert = \lvert E \rvert = \lvert F \rvert$

On en déduit que si E et F sont finis de même taille, f est injective ssi f est surjective, ssi f est bijective et que si $|E| = n$, $|\mathcal{B}ij(E)| = n!$.

D10

10) Composées d'injections, de surjections, de bijections.

PROP : toute composée $\left\{ \boxed{\begin{array}{l} \text{d'injections} \\ \hline \text{de surjections} \\ \hline \text{de bijections} \end{array}} \right.$ est une $\left\{ \boxed{\begin{array}{l} \text{injection} \\ \hline \text{surjection} \\ \hline \text{bijection} \end{array}} \right.$.

D11

11) Exemples de bijections ; dénombrabilité et puissance du continu.

a) Exemples de bijection de $\mathbb{N}$ sur une de ses parties propres, de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$, de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.

D12

b) Exemple de bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ de même type , entre $[0,1]$ et$[0,1[$.

D13

DEF : un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$; il est dit *avoir la puissance du continu* s'il est en bijection avec $\mathbb{R}$.

PROP : il n'y a pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$; un ensemble dénombrable ne peut donc jamais être mis en bijection avec un ensemble ayant la puissance du continu (démonstration dans le cours sur les suites).

Exemple d'ensembles dénombrables : $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$.

Exemples d'ensembles ayant la puissance du continu : $\mathbb{R}$, tout intervalle infini de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ etc... Il y a donc autant de points dans un segment de longueur 1 mm que dans tout l'espace....