

II) Formule et coefficients du binôme (de Newton), et formule de Bernoulli.

1) Formule du binôme de Newton.

a) Découverte de la formule.

D1

b) Définition des coefficients binomiaux et démonstration de la formule.

DEF : les coefficients $\binom{n}{k}$ sont définis pour $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ par :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (relation de Pascal)

PROP : $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dots$

TH (formule du binôme de Newton) :

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

D2

REM 1 : comme $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, NE JAMAIS LAISSER CES 4 coefficients sous cette forme !

REM 2 : bien connaître le début et la fin de la formule :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

E1 : calculer 11^4 et 101^7 sans poser aucune opération, grâce à la formule du binôme.

c) Propriétés des coefficients binomiaux.

REM : on utilisera ici plusieurs fois la propriété suivante :

Si une égalité du type $\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ a lieu POUR TOUT réel x , alors les a_k sont égaux aux b_k pour $0 \leq k \leq n$.

P1 : propriété de symétrie :

$$\text{pour } 0 \leq k \leq n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

D3

P2 : somme, somme alternée d'une ligne du triangle de Pascal :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \dots, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \dots \text{ pour } n \geq 1$$

Application : sommes de 2 en 2 d'une ligne du triangle de Pascal :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = \dots \text{ pour } n \geq 1$$

D4

P3 : somme partielle d'une colonne du triangle de Pascal :

$$\sum_{k=n}^m \binom{\dots}{\dots} = \dots\dots\dots$$

D5, par somme télescopique ou par récurrence.

P4 : somme des carrés des éléments d'une ligne :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \dots\dots\dots$$

D6

d) Calcul explicite de $\binom{n}{k}$.

LEMME (P5) :

$$\text{pour } 1 \leq k \leq n-1 \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

D7

P6 : calcul explicite

$$\text{pour } 1 \leq k \leq n \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \dots \frac{n-k+1}{k}$$

ce qui donne, pour $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

D8

E1

2) Formule de Bernoulli.

C'est la généralisation de l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

TH (formule de Bernoulli) :

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n - b^n = (a-b)(\dots + \dots + \dots + \dots + \dots) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{\dots} b^{\dots}$$

d'où l'on déduit, UNIQUEMENT POUR n IMPAIR :

$$a^n + b^n = (a+b)(\dots - \dots + \dots - \dots + \dots) = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{\dots} a^{\dots} b^{\dots}$$

D9 (par division)

REM importante : si on applique la formule de Bernoulli dans le cas $b = 1, a \neq 1$, on retrouve la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

APPLICATION 1 aux nombres de Mersenne (Marin Mersenne, 1588 - 1648)

PROP : si $M_n = 2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier.

D10

Mersenne pensait que la réciproque était vraie, mais on trouve facilement aujourd'hui un contre-exemple à la calculatrice :.....

On conjecture qu'il existe une infinité de nombres de Mersenne premiers, mais on ne sait actuellement pas le démontrer ; le plus grand nombre de Mersenne premier actuellement connu est $2^{43\ 112\ 609} - 1$; voir www.utm.edu/research/primes/mersenne.

APPLICATION 2 aux nombres de Fermat (Pierre Fermat, 1601 - 1665)

PROP : si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est.....

D11

On pose donc $F_n = 2^{2^n} + 1$

Les seuls nombres de Fermat premiers connus actuellement sont $F_0 = \dots, F_1 = \dots, F_2 = \dots, F_3 = \dots$ et $F_4 = \dots$.
A partir de $F_5 = \dots$, les nombres de Fermat semblent tous être composés, mais on ne l'a pas prouvé.