II) Sommes, récurrences, formule du binôme.

1) NOTATIONS $\sum$ ET $\prod$

a) Notations :

$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$

$\prod_{k=m}^{n} u_k = u_m \times u_{m+1} \times \cdots \times u_n$

k est ici une variable muette, c'est-à-dire qu'on peut changer son nom dans l'expression, sans modifier la valeur de cette expression.

E1: Calculer en fonction de n chacune des quantités suivantes :

$\sum_{k=1}^{n} 1$; $\sum_{k=1}^{n} k$; $\prod_{k=1}^{n} n$; $\prod_{k=1}^{n} k$; $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$; $\sum_{k=1}^{n} (3k-1)$.

b) Changement d'indice par translation.

PROP : $\sum_{k=n}^{m} a_k \overset{(k'=k+p)}{=} \sum_{k'=n+p}^{m+p} a_{k'-p} = \sum_{k=n+p}^{m+p} a_{k-p}$.

E2

$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=?}^{?} a_k$

$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) =?$ (somme télescopique).

Applications :

A1 Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$.

Indication : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

A2 Calculer : $\sum_{k=1}^{n} k.k!$; indication : $k = k+1-1$.

A3 Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

c) Changement d'indices par symétrie.

$\sum_{k=n}^{m} a_k \overset{(k'=p-k)}{=} \sum_{k'=p-m}^{p-n} a_{p-k'} = \sum_{k=p-m}^{p-n} a_{p-k}$.

E3 : $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=...}^{....} a_{n-k}$, et $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=...}^{...} a_{n+1-k}$.

Exo : $A = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 k\frac{\pi}{2n}$; effectuer le changement d'indices $k \longleftarrow n-k$ et en déduire que $A = \sum_{k=0}^{n} \sin^2 k\frac{\pi}{2n}$; en déduire la valeur de A.

d) Sommes doubles.

PROP :

$$\text{P1: } \sum_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n} a_{i\ j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i\ j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i\ j}$$

$$\text{P2: } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i\ j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i\ j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=....}^{...} a_{i\ j}$$

$$\text{P3: } \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j$$

d'où $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$.

e) Produits doubles.

$$\text{P4 :} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_i b_j = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^m \left(\prod_{j=1}^{m} b_j\right)^n$$

e) Moyennes.

DEF : la moyenne arithmétique de n nombres $a_1, ..., a_n$ est définie par $m_1 = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$, la moyenne géométrique de n nombres > 0 $a_1, ..., a_n$ est définie par $m_2 = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$.

PROP : $\min(a_1, ..., a_n) \leqslant m_1, m_2 \leqslant \max(a_1, ..., a_n)$.

D1

REM : on définit aussi des noyennes arithmétiques "à coefficients", ou "pondérées" : $M\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$

(si les p_k sont des naturels, cela revient à prendre p_k fois le nombre a_k, mais les p_k peuvent être des réels quelconques, du moment que $\sum_{k=1}^{n} p_k \neq 0$).

E3

2) Raisonnement par récurrence.

α) Récurrence simple.

Principe :

$$\text{Si } \begin{cases} \text{1) (initialisation) } P(n_0) \text{ est vrai} \\ \text{2) (hérédité) } \forall n \geqslant n_0 \;\; P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ est vrai} \end{cases}, \text{ alors } \forall n \geqslant n_0 \; P(n) \text{ est vrai}$$

Variante :

$$\text{Si } \begin{cases} \text{1) (initialisation) } P(n_0) \text{ est vrai} \\ \text{2) (hérédité) } \forall n \geqslant n_0 + 1 \;\; P(n-1) \Rightarrow P(n) \text{ est vrai} \end{cases}, \text{ alors } \forall n \geqslant n_0 \; P(n) \text{ est vrai}$$

Exemple E4 : la suite de Fibonacci (F_n) est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2 \; F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \end{cases}$$

Remplir le tableau suivant et conjecturer une formule, puis la démontrer par récurrence :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
F_n								
$F_{n-1}F_{n+1}$	/							
F_n^2								

Exemples de récurrences fausses ; déterminer quels sont les erreurs dans les raisonnements suivants :

1 : soit $P(n)$: $n = n + 1$

Si $P(n)$ est vraie, $n = n + 1$, donc, en ajoutant 1, $n + 1 = n + 2$ et $P(n+1)$ est vraie.

Donc, pour tout n, $n = n + 1$.

2. n points distincts donnés du plan sont toujours alignés sur une même droite

Ceci est vrai pour $n = 1$, et même pour $n = 2$.

Supposons que n points distincts donnés du plan sont toujours alignés sur une même droite (hypothèse de récurrence) et considérons $n + 1$ points du plan $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, A_2, ..., A_n$ sont alignés sur une droite D et les n points $A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite D' ; mais comme les points A_2 et A_3 sont communs à D et D', $D = D'$ et les $n + 1$ points $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur $D = D'$, ce qui achève la récurrence.

D2

β) Récurrence double.

Principe :

$$\text{Si } \begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ et } P(n_0+1) \text{ sont vrais} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geqslant n_0 \;\; P(n) \;\; et \; P(n+1) \Rightarrow P(n+2) \text{ est vrai} \end{cases}, \text{ alors } \forall n \geqslant n_0 \; P(n) \text{ est vrai}$$

variante 1 :

$$\text{Si } \begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ et } P(n_0+1) \text{ sont vrais} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geqslant n_0+2 \;\; P(n-2) \;\; et \; P(n-1) \Rightarrow P(n) \text{ est vrai} \end{cases}, \text{ alors } \forall n \geqslant n_0 \; P(n) \text{ est vrai}$$

variante 2 :

$$\text{Si } \begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ et } P(n_0+1) \text{ sont vrais} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geqslant n_0+1 \;\; P(n-1) \;\; et \; P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ est vrai} \end{cases}, \text{ alors } \forall n \geqslant n_0 \; P(n) \text{ est vrai}$$

Exemple E5 : Montrer que pour $n \geqslant ......$, $\dfrac{(1,6)^n}{3} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{(1,7)^n}{2}$.

REM1 : une récurrence double sur $P(n)$ est en fait une récurrence simple sur "$P(n) \;\; et \; P(n+1)$".

D3

REM2 : on peut aussi effectuer des récurrences triples, quadruples,..., $p-$uples.

γ) Récurrence forte.

Principe :

$$\text{Si } \begin{cases} 1) \text{ (initialisation) } P(n_0) \text{ est vrai} \\ 2) \text{ (hérédité) } \forall n \geqslant n_0 \;\; [\forall k \in [|n_0, n|] \quad P(k)] \quad \Rightarrow \quad P(n+1) \text{ est vrai} \end{cases}, \text{ alors } \forall n \geqslant n_0 \; P(n) \text{ est vrai}$$

Exemple E6 : On définit (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \quad u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u_k u_{n-k} \end{cases}$.

REM : une récurrence forte sur $P(n)$ est en fait une récurrence simple sur "$\forall k \in [|n_0, n|] \quad P(k)$".

D4

3) Formule du binôme de Newton.

a) Découverte de la formule.

b) Définition des coefficients binomiaux et démonstration de la formule.

DEF : les coefficients $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont définis pour $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$ par :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in [\vert 1, n-1 \vert] \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ (relation de Pascal)

TH (formule du binôme de Newton) :

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ (a+b)^n = \sum_{k=} \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} a^{\cdots\cdots} b^{\cdots\cdots}$$

D5 :
Pour $n = 0$, cela donne 1=1.
H.R. : $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^{n-1-k} b^k$
Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a\,(a+b)^{n-1} + b\,(a+b)^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} a^{n-1-k} b^{k+1} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} a^{n-1-(k-1)} b^{k-1+1} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} a^{n-k} b^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \right) a^{n-k} b^k + a^n + b^n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k + a^n + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k, \quad CQAR
\end{aligned}$$

PROP : $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$ et $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

REM 1 : comme $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$, NE JAMAIS LAISSER CES 4 coefficients sous cette forme !

REM 2 : bien connaître le début et la fin de la formule :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

E1 : calculer 11^4 et 101^7 sans poser aucune opération, grâce à la formule du binôme.

c) Propriétés des coefficients binomiaux.

REM : on utilisera ici plusieurs fois la propriété suivante :

Si une égalité du type $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ a lieu POUR TOUT réel x, alors les a_k sont égaux aux b_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

P1 : propriété de symétrie :

$$\text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

D6
Les lignes du triangle de pascal forment donc des "palindromes".

P2 : somme, somme alternée d'une ligne du triangle de Pascal :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = ..., \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = ... \text{pour } n \geqslant 1$$

Application : sommes de 2 en 2 d'une ligne du triangle de Pascal :

$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} = ...\text{pour } n \geqslant 1$$

D7

P3 : somme partielle d'une colonne du triangle de Pascal, ou formule de la gouttière :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{...}{...} = ...$$

D8, par somme télescopique ou par récurrence.

P4 : somme des carrés des éléments d'une ligne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = ...$$

D9

d) Calcul explicite de $\binom{n}{k}$.

LEMME (P5, formule du pion) :

$$\text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

D10

P6 : calcul explicite

$$\text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} ..... \frac{n-k+1}{k} = \frac{k \text{ descendant à partir de } n}{k \text{ montant à partir de } 1}$$

ce qui donne, pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

D11
E6

4) Formule de Bernoulli.
C'est la généralisation de l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

TH (formule de Bernoulli) :

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ a^n - b^n = (a-b)(...... + ... + ... + ... + ...) = (a-b) \sum_{k=} a^{......} b^{......}$$

d'où l'on déduit, UNIQUEMENT POUR n IMPAIR :

$$a^n + b^n = (a+b)\,(...... - .... + ... - ...... + ...) = (a+b)\sum_{k=} (-1)^{......}\, a^{......} b^{......}$$

D12 (par division)

REM importante : si on applique la formule de Bernoulli dans le cas $b = 1, a \neq 1$, on retrouve la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$1 + a + ... + a^{n-1} = \frac{..........}{}$$

APPLICATION 1 aux nombres de Mersenne (Marin Mersenne, 1588 - 1648)
PROP : si $M_n = 2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier.

D13

Mersenne pensait que la réciproque était vraie , mais on trouve facilement aujourd'hui un contre-exemple à la calculatrice :.........

On conjecture qu'il existe une infinité de nombres de Mersenne premiers, mais on ne sait actuellement pas le démontrer ; le plus grand nombre de Mersenne premier actuellement connu est $2^{43\ 112\ 609} - 1$; voir www.utm.edu/research/primes/mersenne.

APPLICATION 2 aux nombres de Fermat (Pierre Fermat, 1601 - 1665)
PROP : si $2^n + 1$ est un nombre premier, alors n est..

D14
On pose donc $F_n = 2^{2^n} + 1$

Les seuls nombres de Fermat premiers connus actuellement sont $F_0 = ...$, $F_1 = ...$, $F_2 = ...$, $F_3 = ...$ et $F_4 = ...$
A partir de $F_5 = ...$, les nombres de Fermat semblent tous être composés, mais on ne l'a pas prouvé.