GUIDE DE L'EXPERT EN CALCUL ALGEBRIQUE NIVEAU LYCEE

Première partie : commençons par la fin ! PRESENTATION DES RESULTATS

Dans la présentation du résultat d'un calcul algébrique, le but doit être la simplicité maximale et la facilité de lecture.

I Quand il n'y a que des sommes algébriques et des produits (cas des polynômes), les termes semblables doivent être regroupés, les factorisations évidentes effectuées, les coefficients numériques placés avant les lettres, lesquelles sont placées, si possible dans l'ordre alphabétique, en tenant compte de l'ordre décroissant, ou croissant des degrés.

Exemples :
$b \times 3a^2 + 6a^3 + aba.18 - 15a + 12ba$ sera présenté $3a\left(2a^2 + 7ab + 4b - 5\right)$.

$-2x^3 + 8x^2 - 15x\left(x-1\right)$ sera présenté $-x\left(2x^2 + 7x - 15\right)$ (ici, on a mis $-x$ et non x en facteur, car on préfère que le coefficient du terme de plus haut degré du deuxième facteur soit positif)

Exercices

1. $-2v^2u + 6tvw - 3v.2u + u^3.2v - 2v^4$
2. $-30x^4 + 75x^2 - 90yx^3$
3. $\left(3x - x^2\right)\left(5 - x^3\right)$
4. $\left(x-a\right)\left(3-x\right)\left(2x-6\right)\left(ab-bx\right)$
5. $y\left(2x^2 + 3xy + y^2 + x^2\right) - y^3$

II Quand il y a des quotients, le but doit être de réduire au maximum le nombre de traits de fraction en utilisant la propriété $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$; éviter aussi les grands traits de fraction du style $\dfrac{3a^2 + 5abc + 3acb^2}{2}$ (à remplacer par $\dfrac{a}{2}\left(3a + 5bc + 3b^2c\right)$.
Rappelons qu'il faut toujours commencer l'écriture d'un quotient PAR LE TRAIT DE FRACTION, de sorte que tous les traits de fractions principaux ET LES SIGNES = soient au même niveau :

Ne jamais écrire $\begin{matrix} x = 2 \\ \overline{a+5} \end{matrix}$ mais $x = \dfrac{2}{a+5}$

Exemples :
$m\left(x - \dfrac{2}{m}\right)\left(3x-2\right)$ doit être remplacé par $\left(mx-2\right)\left(3x-2\right)$
$\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{a}}$ doit être remplacé par $\dfrac{1}{a-1}$
Exercices

6. On pose $f\left(x\right) = x.\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$; on demande de présenter sous la forme la plus simple $f\left(2\right), f\left(3\right), f\left(\dfrac{1}{x}\right), f\left(-x\right), f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
7. Simplifier $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \times ... \times 1 - \dfrac{1}{n}$.

III Quand, de plus, il y a des racines carrées, il faut rendre rationnels les dénominateurs.
Exemples
$\sqrt{\dfrac{28}{3}} = 2\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{21}$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ (multiplier par la quantité conjuguée).
Exception : les expressions du type $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ comme $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ seront laissées ainsi, car elles sont plus courtes que $\dfrac{a}{b}\sqrt{b}$.

Exercices

8. Simplifier $a = \dfrac{4}{3-\sqrt{5}}, b = \dfrac{22}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}, d = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$

Deuxième partie : calculs proprement dits.

I Développer, c'est utiliser la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, à savoir $a(b+c) = ab + ac$.

Mais les "identités remarquables", qui sont des développements faits à l'avance à connaître par coeur permettent d'aller plus vite ; ne jamais oublier de les utiliser.

Rappels :

$(a+b)^2 =$	$(a+b)^3 =$ ....
$(a-b)^2 =$	$(a-b)^3 =$ ....
$(a+b)(a+b) =$	

Exercices

9. Développer $(a+b+c)^2$.

10. Développer $(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$; en déduire un exemple de 3 nombres a, b, c distincts tels que $a^3+b^3+c^3 > 3abc$.

11. Montrer que $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

12. Montrer que $(a+1)(a+2)(a+3)+1 = \left(a^2+3a+1\right)^2$.

II Factoriser, c'est utiliser la propriété de distributivité dans l'autre sens : $ab+ac = a(b+c)$

$a^2+b^2+2ab =$	$a^2-b^2 =$ ....
$a^2+b^2-2ab ==$	

Exercices : factoriser et présenter en utilisant les conseils de la première partie.

13. $A = \left(4x^2-25\right)(x+2)-\left(x^2-4\right)(2x+5)+(5x+10)(2x+5)$

14. $B = x^2-2x+1-(x-1)(2x+3)$

15. $C = 5\left(x^2-4\right)+x^2-4x+4+(6x-3)(x+3)$

16. $D = 16(2x+7)^2-25(3x-7)^2$

17. $E = x^2+4x+3$

18. $F = 4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$ (il doit y avoir 4 facteurs)

III. Quand il y a des quotients, on utilise les propriétés fondamentales :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ et } \frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ne pas oublier que $\dfrac{a}{1} = a$, donc

$$\frac{ab}{c} = a\frac{b}{c} = b\frac{a}{c} = \frac{1}{c}ab \text{ etc...}$$

Simplifier les fractions grâce à $\dfrac{ak}{bk} = \dfrac{a}{b}$.

Très important : Si l'expression est trop compliquée, faire des calculs intermédiaires. Par exemple, dans 23, poser $a = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}; b = 1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$

Exercices : calculer

19. $A = \dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}}; B = \dfrac{2+\dfrac{2+a}{2-a}}{2-\dfrac{2+a}{2-a}}$

20. $\dfrac{1}{20455392} + \dfrac{1}{30233088}$

21. $x = \dfrac{a}{\dfrac{b}{\dfrac{c}{d}}}; y = \dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}; z = \dfrac{\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c}}{d}; t = \dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$

En général, on retient que $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$; mais il est aussi utile de savoir que $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{a}{c} \times \dfrac{d}{b}$

Application : $\dfrac{\dfrac{a^2}{3b}}{\dfrac{ac}{6b}} = \dfrac{a^2}{ac} \times \dfrac{6b}{3b} = 2\dfrac{a}{c}$

22. Calculer $\dfrac{\dfrac{3}{10} \times \dfrac{15}{\dfrac{9}{2}}}{\dfrac{9}{15} \times \dfrac{5}{2}}$

IV Quand il y a des racines carrées, savoir que si A et B sont $\geqslant 0$, $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{AB}$, $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$, $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$, et que pour A quelconque, $\sqrt{A^2} = |A|$

Exercices :

23. Simplifier $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

24. Calculer A^2, où $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ et en déduire une expression simple de A (attention au signe).

25. Idem pour $B = \sqrt{12-3\sqrt{7}} - \sqrt{12+3\sqrt{7}}$

Rappel des propriétés sur les puissances ; m et n sont des entiers pouvant être négatifs :

$$\begin{aligned} a^n.b^n &= (ab)^n \\ a^n a^m &= a^{n+m} \\ \frac{1}{a^n} &= a^{-n} \\ (a^n)^m &= a^{nm} \end{aligned}$$

Exercices

26. Mettre les nombres suivants sous la forme $2^a 3^b$

$x = \dfrac{2^3 3^2}{6^{-2} 3^4 2^8}; y = 2^{100} + 2^{101}; z = 2^{101} - 2^{100}; t = 3^{15} + 3^{15}; u = \dfrac{3^{16}+3^{15}}{3^{16}-3^{15}}; v = \dfrac{\left(3^2 (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 2^3\right)^{-2}}$

Bon courage et bons progrès en calculs !