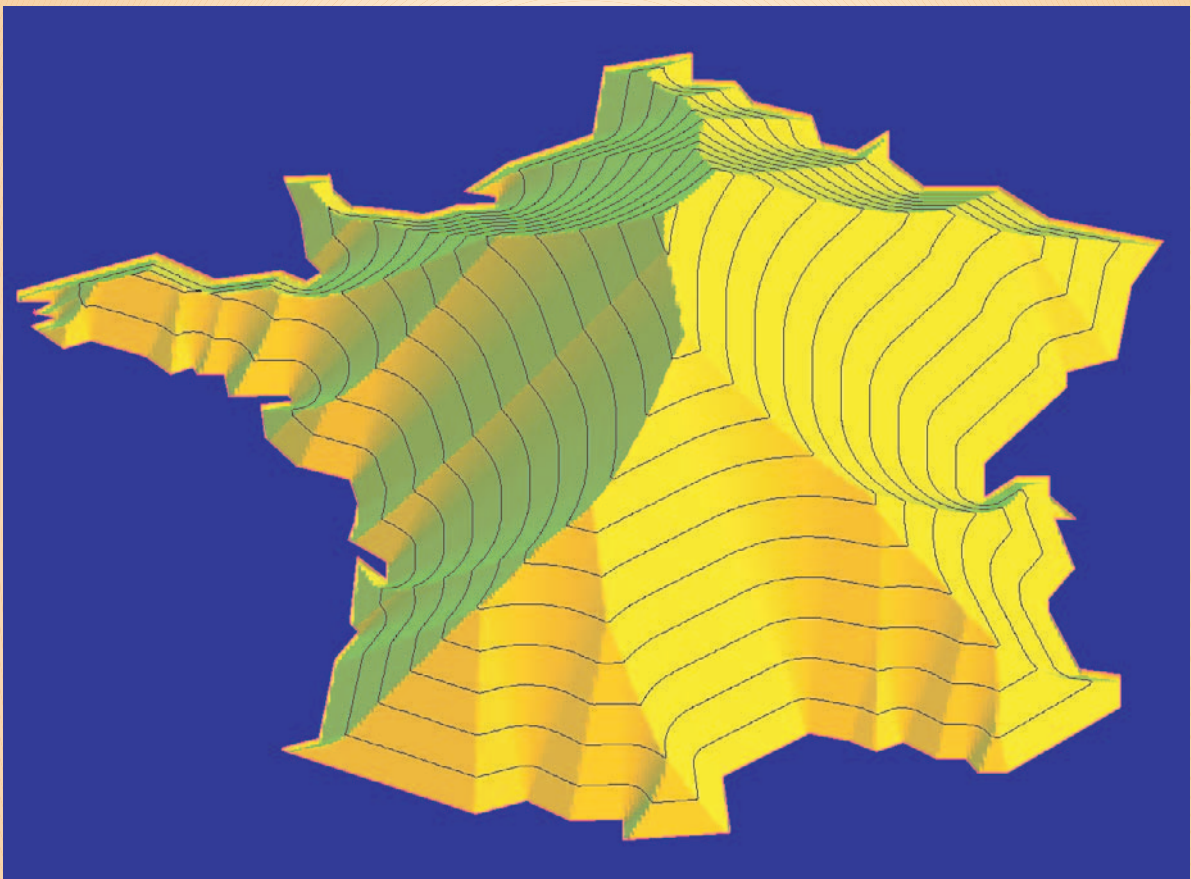


# **Quadrature**

**Magazine de mathématiques pures et épicées**

*La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde*



- ◆ **La loi de Benford** ◆
- ◆ **Enveloppe convexe** ◆
- ◆ **Les points d'éloignement maximal** ◆
- ◆ **Petit essai de théologie circulaire** ◆
- ◆ **Méthodes de preuve** ◆
- ◆ **Coin des problèmes** ◆

**Magazine trimestriel n° 48**  
**Avril-Juin 2003**  
ISSN 1142-2785 – 8 Euros



# Les points d'éloignement maximal

par Robert Ferreol\*

## I Quel est le vrai centre de la France ?

Vous avez certainement entendu parler de ces villages situés au nord de Montluçon (Vesdun, Nassigny, etc.) qui se disputent le titre de centre géographique de la France. Il s'agit alors toujours du centre de gravité, point où la surface de la France serait en équilibre si on la posait sur une pointe ; si on adjoint ou non la Corse à la métropole, le centre se déplace de quelques kilomètres.

Mais on pourrait penser à une autre définition : celle de point le plus éloigné possible de tout pays étranger, où la distance à parcourir pour arriver à la frontière (ou à la mer) est la plus grande possible. Nous désignerons ce point par « cœur de la France » et c'est cette notion que nous allons étudier dans cet article.

## II Distance à une partie

Considérons une partie  $X$  non vide du plan euclidien  $P$  ; la distance d'un point  $m$  du plan à  $X$  est la borne inférieure des distances de  $m$  aux points de  $X$ . Comme on peut démontrer que la distance de  $m$  à  $X$  est la même que celle de  $m$  à l'adhérence de  $X$ , nous supposons que  $X$  est fermée. Il est alors classique que la distance  $r$  de  $m$  à  $X$  est atteinte en un ou plusieurs points de  $X$ , appelés *projetés* de  $m$  sur  $X$ , situés sur le cercle de centre  $m$  et de rayon  $r$  ; le disque ouvert de centre  $m$  et de rayon  $r$ , lui, ne contient aucun point de  $X$ . En résumé :

$$r = d(m, X) \Leftrightarrow D(m, r) \cap X = \emptyset \\ \text{et } C(m, r) \cap X \neq \emptyset.$$

D'autre part, la fonction  $f_X : m \mapsto d(m, X)$  est 1-lipschitzienne, donc continue sur  $P$ . L'ensemble des projetés de  $m$  est donc compact.

## III Point d'éloignement maximal (ou PEM) et cœur

La notion qui nous intéresse est celle de maximum (forcément local) de la fonction  $f_X$  (remarque : le lecteur montrera facilement que  $f_X$  n'a pas de minimum en d'autres points que ceux de  $X$ ) ; les points où  $f_X$  est maximale seront appelés des *points d'éloignement maximal* (ou PEM) pour  $X$  ; si le maximum est strict, on parlera de point d'éloignement maximal strict ; les cercles (resp. disques fermés) de centre un PEM  $c$  et de rayon la distance de  $c$  à  $X$ , seront appelés les *cercles* (resp. *disques*) *inscrits* dans  $X$ .

Une partie  $X$  n'admet pas forcément de PEM, par exemple si elle n'a qu'un élément. Mais si  $X$  est la frontière d'un compact  $K$  du plan, d'intérieur non vide, la restriction de  $f$  à  $K$  possède au moins un maximum  $> 0$  atteint en un point  $c$  intérieur à  $K$  ; nous appellerons ces points des *points-cœur locaux* de  $K$ , et des *points-cœur* (tout court) si le maximum est global sur  $K$ . Le cœur de  $K$  est alors l'ensemble des points-cœur. Notre problème initial est donc de trouver le cœur de la surface de la France.

## IV Caractérisation des PEM

Considérons une partie  $X$  fermée non vide et  $m_0$  un point du plan, de distance à  $X$  égale à  $d$ ,  $C$  le cercle (resp.  $D$  le disque) de centre  $m_0$  et de rayon  $d$  ; le cercle  $C$  contient, nous l'avons vu, des points de  $X$ . La condition pour que  $D$  soit inscrit dans  $X$  (autrement dit, que  $m_0$  soit un PEM) est qu'il existe un voisinage  $V$  de  $m_0$  tel que pour tout point  $m$  de  $V$ ,  $f_X(m) \geq d$ , autrement dit que le disque fermé de centre  $m$  et de rayon  $d$  rencontre  $X$  ; en langage formalisé,

$$m_0 \text{ est un PEM pour } X \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(m_0) \\ \forall m \in V \quad \overline{D}(m, f_X(m_0)) \cap X \neq \emptyset,$$

\* rferreol@noos.fr

et de même,

$$m_0 \text{ est un PEM strict pour } X \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(m_0) \\ \forall m \in V \setminus \{m_0\} \quad D(m, f_X(m_0)) \cap X \neq \emptyset.$$

De façon imagée, cela signifie que l'on ne peut pas déplacer, dans quelque direction que ce soit, le disque de centre  $m_0$  et de rayon  $d$  sans commencer par empiéter sur  $X$ .

En contraposée :

$$m_0 \text{ n'est pas un PEM pour } X \Leftrightarrow \\ \text{il existe une suite de disques fermés} \\ \text{de rayons } f_X(m_0) \text{ disjoints de } X \\ \text{dont la suite des centres tend vers } m_0.$$

$$m_0 \text{ n'est pas un PEM strict pour } X \Leftrightarrow \\ \text{il existe une suite de disques ouverts de rayons} \\ f_X(m_0) \text{ disjoints de } X \text{ dont la suite} \\ \text{des centres tend strictement vers } m_0.$$

On sent bien que pour que  $m_0$  soit un PEM, il faut que les projetés de  $m_0$  l'« entourent » de sorte que  $D$  ne puisse être déplacé sans empiéter sur  $X$ . Si, cas extrême,  $C$  est inclus dans  $X$ ,  $m_0$  est clairement un PEM pour  $X$ , qui est même strict. Et à l'autre extrême, si  $C \cap X$  est réduit à un point,  $m_0$  n'est pas un PEM pour  $X$ .

Pour savoir quelle est la limite entre ces deux extrêmes, désignons par  $\alpha \in [0, 2\pi]$  la borne supérieure des angles au centre des arcs du cercle  $C$  ne contenant aucun point de  $X$ .

Nous allons démontrer que

**Théorème 1.**

- a) si  $\alpha > \pi$  alors  $m_0$  n'est pas un PEM pour  $X$  ;
- b) si  $\alpha < \pi$  alors  $m_0$  est un PEM pour  $X$  ;
- c) si  $\alpha = \pi$ , les deux cas sont possibles.

Pour prouver ce théorème, nous allons commencer par caractériser les deux conditions  $\alpha > \pi$  et  $\alpha < \pi$ .

**Lemme.**

- a)  $\alpha > \pi$  ssi  $C$  contient un demi-cercle fermé d'intersection vide avec  $X$  (autrement dit : les projetés de  $m_0$  sont situés sur un même demi-cercle ouvert) ;
- b)  $\alpha < \pi$  ssi trois des projetés de  $m_0$  forment un triangle aigu strict, ou sinon les projetés forment un rectangle (non aplati).

*Démonstration.*

- a) est facile, sachant que  $X \cap C$  est compact ;

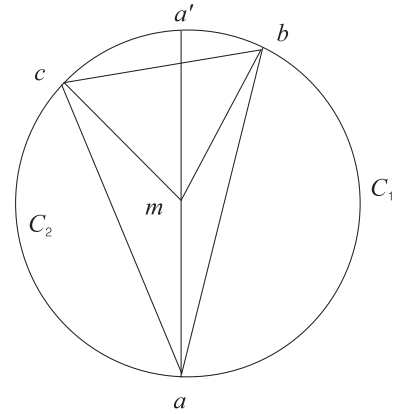


Figure 1.

- b) Supposons que  $\alpha < \pi$  et que trois projetés de  $m_0$  ne forment jamais un triangle aigu (i.e. dont les trois angles sont strictement aigus) et considérons un projeté  $a$  de  $m_0$  et son point diamétralement opposé  $a'$  ; les points  $a$  et  $a'$  partagent  $C$  en deux demi-cercles fermés  $C_1$  et  $C_2$  et  $X \cap C_1$  est un fermé possédant un point  $b$  le plus éloigné possible de  $a$  sur  $C_1$  ;  $c$  est de même le point le plus éloigné possible de  $a$  sur  $C_2$  (voir figure 1).

Supposons que  $b \neq c$  ; alors les longueurs des arcs  $(ab)$  sur  $C_1$  et  $(ac)$  sur  $C_2$  sont par définition strictement inférieures à  $\pi d$  et la longueur de l'arc  $(cb)$  contenant  $a'$  également, car cet arc ne contient pas de points de  $X$  et  $\alpha < \pi$ . Le triangle  $(abc)$  est donc aigu, ce qui est absurde. Les points  $b, c$  et  $a'$  sont donc confondus et  $a'$  est un projeté de  $m_0$ .

Si  $a$  et  $a'$  étaient les seuls projetés,  $\alpha$  serait égal à  $\pi$ , ce qui ne se peut pas. Il existe donc un autre projeté  $b$ , et de la même façon, le point  $b'$  diamétralement opposé à  $b$  est lui aussi un projeté.  $(aba'b')$  est alors un rectangle, et l'on remarque qu'on ne pourrait avoir d'autres projetés sans créer un triangle aigu.  $\square$

*Démontrons maintenant le théorème 1.*

- a) Si  $\alpha > \pi$ , soit  $C_1$  un demi-cercle fermé (qui est un compact) d'intersection vide avec  $X$ , d'extrémités  $a$  et  $b$  ; la distance  $\varepsilon$  de  $C_1$  à  $X$  est strictement positive, et considérons le point  $c$  situé à une distance  $\varepsilon$  de  $m_0$  sur la perpendiculaire à  $(ab)$  passant par  $m_0$  (voir figure 2). Les disques fermés de rayon  $d$  centrés sur  $]m_0c[$  ne rencontrent pas  $X$ , donc  $m_0$  n'est pas un PEM pour  $X$ .

- b) Si  $\alpha < \pi$ , supposons qu'il y ait trois projetés  $a, b, c$  formant un triangle aigu. Le point  $m_0$  est intérieur au triangle plein  $(abc)$  et point d'intersection de ses médiatrices. Tout point de ce triangle plein est plus proche de  $a, b$  ou  $c$ , donc de  $X$ , que  $m_0$  :  $m_0$  est un PEM de  $X$ . Sinon,  $X \cap C$  est un rectangle  $(abcd)$  et de même, tout point de ce triangle plein est plus proche

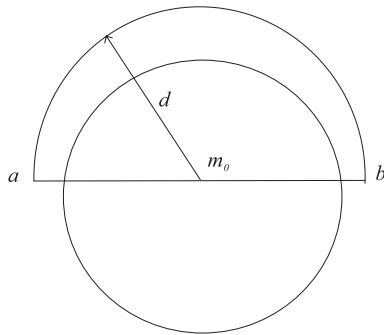


Figure 2.

de  $a, b, c$  ou  $d$ , donc de  $X$ , que  $m_0$  et  $m_0$  est un PEM pour  $X$ .

c) Voici deux exemples avec les deux cas possibles.

$\alpha$ ) Si  $X$  est la réunion de deux droites strictement parallèles distantes de  $2d$  (voir figure 3), les PEM de  $X$  sont les points  $m_0$  de la droite médiane des deux droites et les projetés de  $m_0$  sont diamétralement opposés sur  $(C)$ , donc  $\alpha = \pi$ .

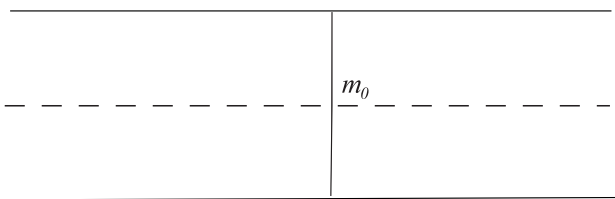


Figure 3.

$\beta$ ) Si  $X$  est formé de deux points  $a$  et  $b$  distants de  $2d$ , le milieu  $m_0$  de  $a$  et  $b$  vérifie  $\alpha = \pi$  mais ce n'est pas un PEM car aucun disque fermé centré sur la médiatrice de  $a$  et  $b$  (sauf en  $m_0$ ) ne rencontre  $(C)$ .  $\square$

**Remarque.** Si  $\alpha = \pi$  et  $X$  est fini, on peut montrer, de façon similaire à ce que nous avons fait dans le cas a) en utilisant le fait que la distance de  $C$  à  $X \setminus C$  est strictement positive, que  $X$  ne peut avoir de PEM.

On peut donc énoncer les choses sous une autre forme :

**Théorème 2.** *S'il existe un disque ouvert centré en  $m_0$  ne contenant aucun point de  $X$  dont la frontière contient au moins trois points distincts de  $X$  formant un triangle aigu au sens strict, ou quatre points distincts de  $X$  formant un rectangle, alors  $m_0$  est un PEM pour  $X$ . La réciproque est vraie si  $X$  est fini.*

## V Courbes de niveau de $f_X$

Un moyen d'obtenir les extremums d'une fonction continue est de tracer ses courbes de niveau,

c'est-à-dire les ensembles de points saturés où cette fonction est constante ; en effet, une fonction continue présente un extremum strict en un point si et seulement si ce point est un point isolé de sa courbe de niveau ; pour ce qui nous intéresse ici :

$m$  est un PEM strict pour  $X$  ssi  $m$  est un point isolé de sa courbe de niveau.

Nous allons donc examiner les propriétés de ces courbes de niveau.

Définissons d'abord les « disques » de centre  $X$  et de rayon  $\alpha$

$$\overline{D}(X, \alpha) = \{m \in P \mid d(m, X) \leq \alpha\}$$

$$D(X, \alpha) = \{m \in P \mid d(m, X) < \alpha\}$$

La courbe de niveau  $\alpha$  de la fonction  $f_X$  est alors  $L(X, \alpha) = \overline{D}(X, \alpha) \setminus D(X, \alpha)$  ; en voici quelques propriétés :

$\overline{D}$  est fermé, borné ssi  $X$  est borné ;

et c'est bien l'adhérence de  $D$ .

$L$  est la frontière de  $D$  (elle est donc d'intérieur vide).

$D \subset \overset{\circ}{\overline{D}}$  mais peut être différent

( $L$  n'est donc pas forcément la frontière de  $\overline{D}$ ).

On obtient un exemple de ce dernier phénomène en prenant une partie  $X$  constituée de deux demi-plans fermés disjoints distants de  $2\alpha$  ; ici  $D(X, \alpha)$  est constitué du plan privé de la droite médiane des deux bords des demi-plans, tandis que  $\overline{D}(X, \alpha)$  est le plan tout entier (voir figure 4).

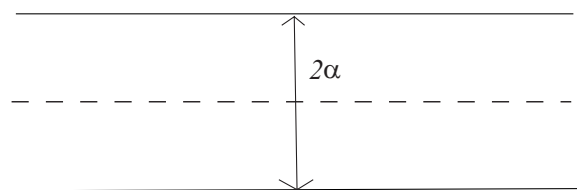


Figure 4.

Voici d'autres propriétés :

$$\text{si } 0 \leq \beta \leq \alpha$$

$$\overline{D}(X, \alpha) = \overline{D}(\overline{D}(X, \beta), \alpha - \beta)$$

$$D(X, \alpha) = D(\overline{D}(X, \beta), \alpha - \beta)$$

$$L(X, \alpha) = L(\overline{D}(X, \beta), \alpha - \beta)$$

En d'autres termes, pour tracer les courbes de niveau de  $f_X$ , on peut utiliser les lignes de niveau précédentes pour tracer les suivantes ; en pratique, si  $X$  est une courbe, un tracé au stabilo de largeur constante donnera une bonne idée de ces courbes de niveau.

Ceci a une application pour la détermination pratique des PEM pour  $X$  ; en effet, on en déduit que si  $0 \leq \alpha < d(m_0, X)$ ,  $m_0$  est un PEM pour  $X$  si et seulement si c'est un PEM pour  $D(X, \alpha)$ . En prenant des  $\alpha$  de plus en plus grands on se rapproche ainsi petit à petit du PEM. Cette méthode a été baptisée par des élèves de MPSI qui travaillaient sur ce sujet : « méthode de la réduction ».

Définissons enfin la *zone d'attraction* d'un point  $x$  de  $X$  comme l'ensemble de points  $m$  ayant  $x$  pour projeté. Alors les zones d'attraction sont des fermés formant une *quasi-partition* du plan (en ce sens qu'elles s'intersectent sur leur frontière).

On peut montrer que l'intersection de la ligne de niveau  $\alpha$  de  $f_X$  avec la zone d'attraction de  $x$  est un arc de cercle de centre  $x$  et de rayon  $\alpha$  (mais qui, malheureusement, peut être réduit à un point).

## VI Cas où $X$ est fini

Si  $|X| = 1$ ,  $X$  n'a pas de point d'éloignement maximal (voir figure 5).

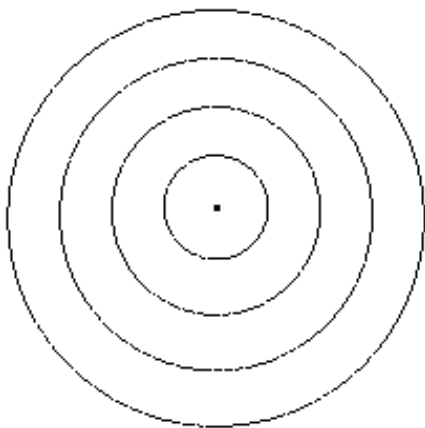


Figure 5.

Si  $|X| = 2$ ,  $X$  n'a pas de PEM, bien qu'il y ait un point col (voir figure 6).

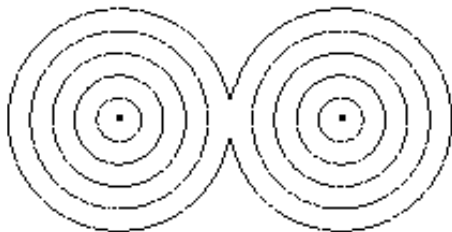


Figure 6.

Si  $|X| = 3$ ,  $X$  a un centre ssi  $X$  est un triangle aigu au sens strict et le PEM, strict et unique, est le centre du cercle circonscrit.

Le cas aigu est représenté sur la figure 7.

Le cas non aigu est représenté sur la figure 8.

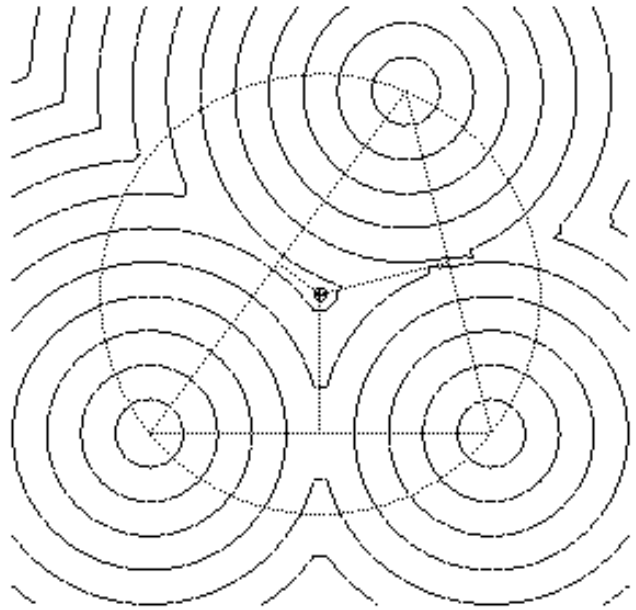


Figure 7.

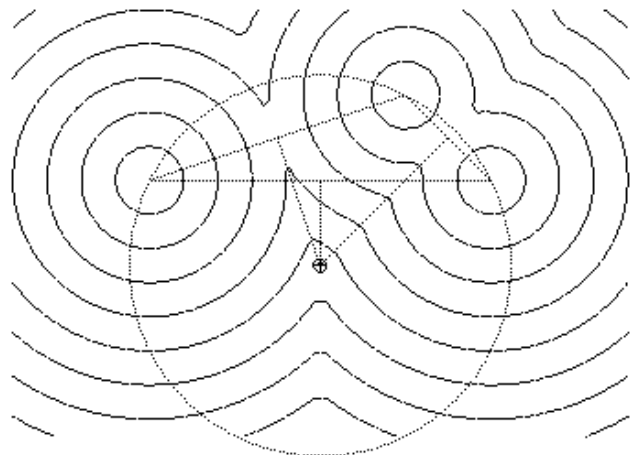


Figure 8.

Si  $|X| = n > 3$ , on examine chaque triangle formé à partir des points de  $X$  dont le disque ouvert circonscrit ne contient aucun autre point de  $X$  ; le centre de son cercle circonscrit est un centre de  $X$  ssi

soit 1) ce triangle est aigu au sens strict ;

soit 2) il est rectangle et le 4<sup>e</sup> sommet du rectangle est un point de  $X$ .

Il y a donc un nombre fini de PEM, inférieur ou égal à  $C_n^3$ . Il me semble que leur nombre est même toujours  $\leq 2n$ , cas atteint dans le cas d'un réseau équilatéral, mais ceci resterait à prouver.

De plus, pour tout  $n$ , on peut trouver un  $X$  sans PEM, par exemple en mettant tous les points sur un même demi-cercle.

## VII Les surfaces de tas de sable

Nous allons voir ici un rapport inattendu entre les tas de sable et le problème qui nous intéresse.

Considérons un tas de sable posé sur un plan et supposons que ce tas de sable soit saturé, c'est-à-dire que l'on ne peut y rajouter du sable sans agrandir la surface en contact avec le plan. On constate expérimentalement qu'un grain de sable situé à la surface ne se met à rouler sur les grains situés en-dessous que lorsque la pente est supérieure à un certain seuil. Le tas de sable étant saturé, la pente de sa surface est donc égale à cette valeur limite en tout point. On démontre qu'alors les lignes de pente sont rectilignes et on en déduit que l'altitude d'un point de la surface est proportionnelle à la distance au point le plus proche du contour  $X$  de la surface de contact  $K$  avec le sol. Autrement dit, à une affinité près, cette surface est la surface d'équation

$$z = d((x, y), X).$$

On en déduit que *le cœur de  $K$*  (ensemble de ses points situés à la distance maximum de sa frontière  $X$ ) s'obtient en projetant sur le sol les points d'altitude maximum du tas de sable.

Je ne pense pas que cette méthode ait de grandes applications pratiques, mais elle a un indéniable côté esthétique que nous allons voir dans les figures qui vont suivre.

### VIII Des exemples de cœurs de compact

Rappelons que le cœur d'un compact  $K$  est l'ensemble de ses points situés à la distance maximum de sa frontière  $X$ ; ce sont donc aussi les centres des disques de rayon maximum inclus dans  $K$ .

– Si  $K$  est un disque ou un carré plein, le cœur est constitué du centre; la figure 9 montre cette configuration, et la figure 10 celle du tas de sable associé.

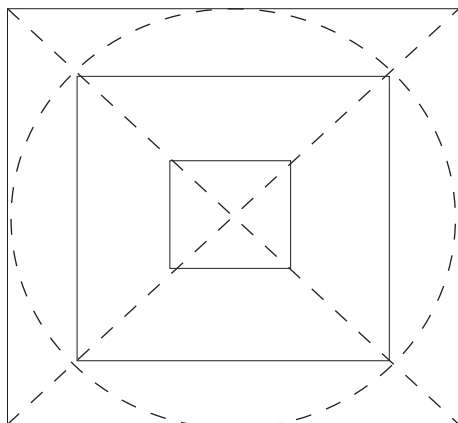


Figure 9.

– Si  $K$  est un triangle plein (voir figures 11 et 12), le cœur est constitué du point d'intersection des bissectrices, centre du cercle inscrit (comparer avec le

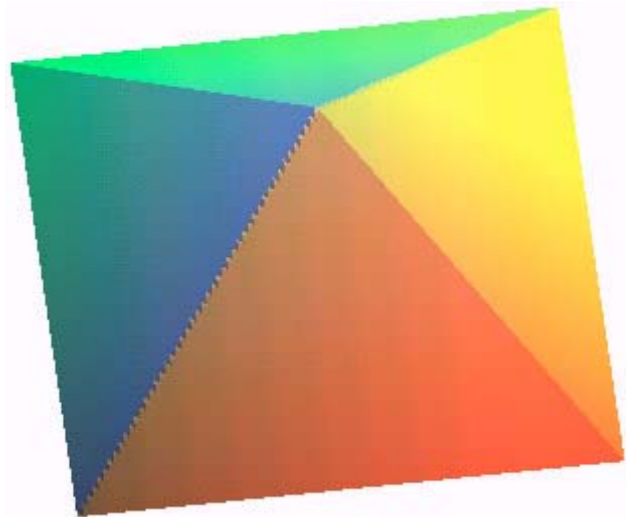


Figure 10.

cas vu ci-dessus du « tripoint » où le PEM est le centre du cercle circonscrit, et encore, pas toujours).

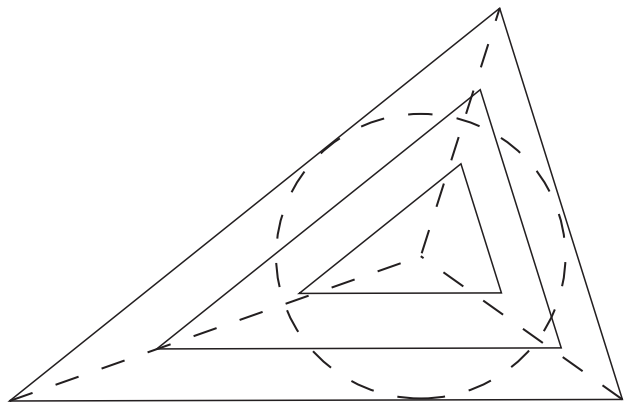


Figure 11.

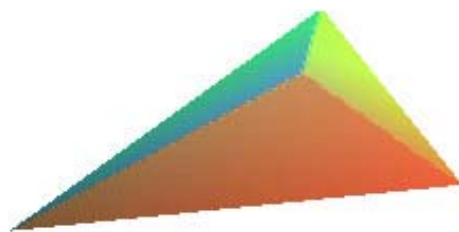


Figure 12.

– Si  $K$  est un rectangle plein (voir figures 13 et 14), le cœur n'est pas réduit au centre, mais est constitué d'un segment parallèle au côté le plus long (alors que le PEM des quatre sommets est, lui, le centre).

– Si  $K$  est une couronne circulaire, le cœur est le cercle médian; remarquons que dans ce cas, le centre de la couronne est un PEM de la frontière de la couronne, mais n'est pas un point-cœur de  $K$ .

– Si  $K$  est strictement convexe, le lecteur démontrera que le cœur est réduit à un point; par exemple, le cœur d'une ellipse pleine est son centre.

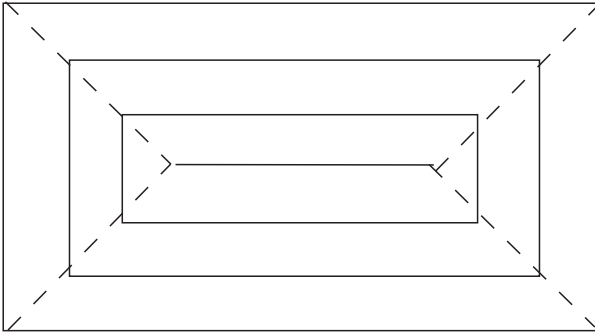


Figure 13.

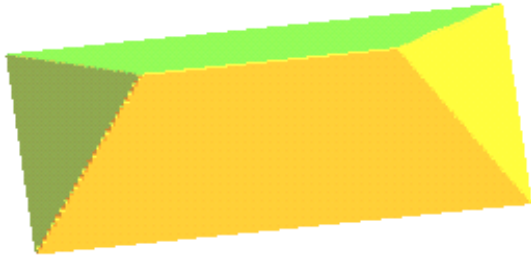


Figure 14.

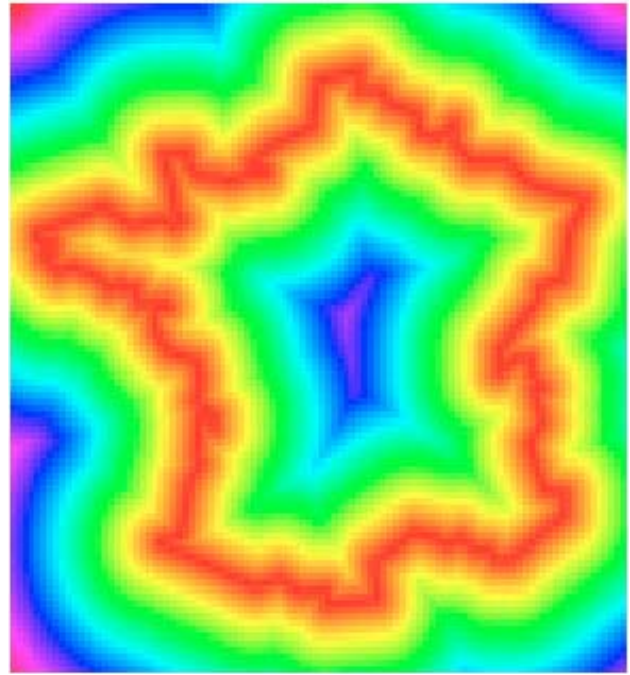


Figure 16.

## IX Le cœur de la France

Avec un fond de carte, la méthode du stabilo donne un premier résultat représenté sur la figure 15

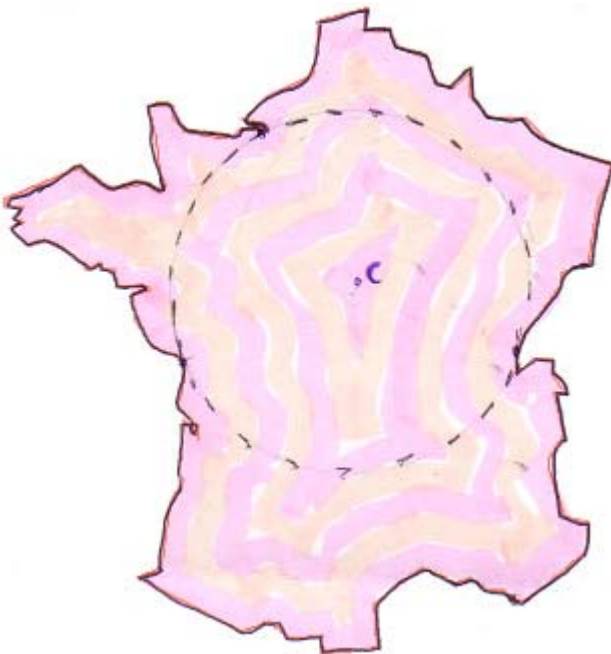


Figure 15.

À l'aide d'un programme Maple utilisant la fonction `listdensityplot`, j'ai obtenu la figure 16.

Et la figure 17 montre le tas de sable de contour la frontière de la France.

Avec une carte plus précise que le fond de carte ci-dessus (figure 15), mais d'une dimension permettant l'usage du compas, j'ai cherché ce centre par approxi-

mations successives. Ce n'est pas si facile : car si l'on obtient facilement un cercle tangent en deux points de la frontière, il est beaucoup plus difficile de savoir comment déplacer la pointe du compas pour obtenir la tangence voulue en trois points. Albert Lenz m'a proposé l'algorithme efficace suivant, sans avoir prouvé sa convergence :

Tracer un cercle coupant la frontière en trois paires de points assez rapprochés, puis planter la pointe du compas au centre du cercle circonscrit au triangle des milieux trois paires de points, et recommencer.

Le verdict est que le cœur de la France se trouve à quelques kilomètres au nord de Bourges, et que les trois projetés sur la frontière (formant un triangle aigu) se trouvent l'un au nord de La Rochelle, sur l'anse de l'Aiguillon, l'autre à l'estuaire de la Seine, et le troisième à la frontière suisse dans le Jura, chacun situés à environ 320 km de Bourges en voiture, distance qui est donc la distance maximale qu'un Français puisse avoir à parcourir pour atteindre la frontière du pays.

On remarque que le cœur est situé plus au nord que le centre géographique ; ceci se comprend bien en regardant la figure ci-dessus : le disque inscrit dans la frontière laisse nettement plus de territoire au sud qu'au nord.

Dernière remarque : la Bretagne possède un point-cœur local situé aux environs de Carhaix (que l'on remarque bien sur la figure de tas de sable), et la Corse également, bien sûr.

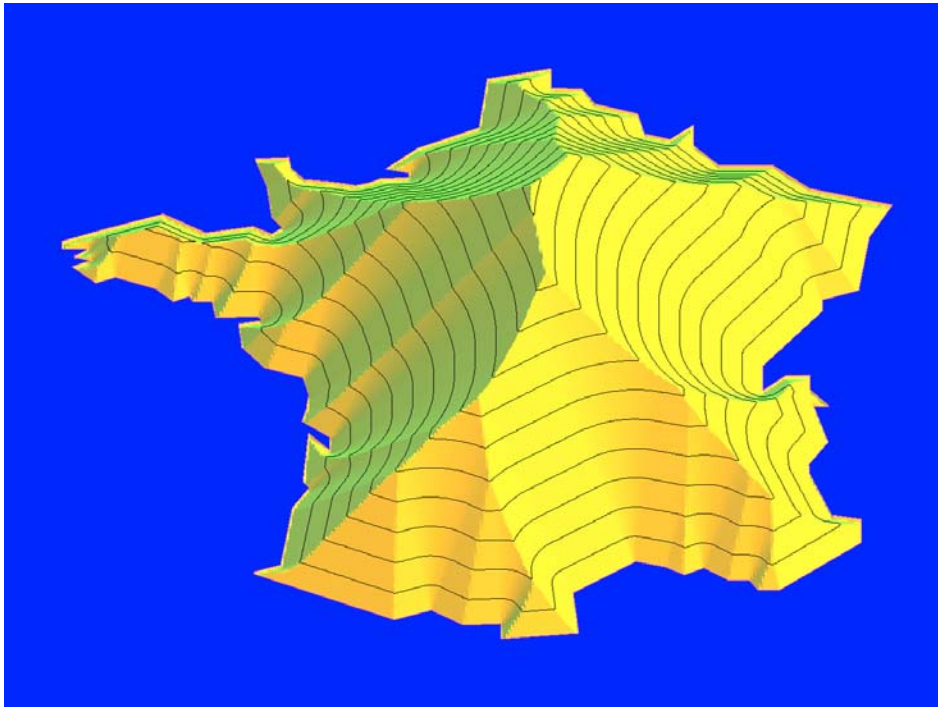


Figure 17.

### X Prolongements

Cette étude est à compléter dans diverses directions.

a) Il faudrait étudier plus en détail le cas où la frontière de  $K$  est une ligne polygonale, auquel cas le centre s'obtient facilement à partir des zones d'attraction de chaque segment de cette ligne.

Un exemple avec une ligne convexe est représenté sur les figures 18 et 19.

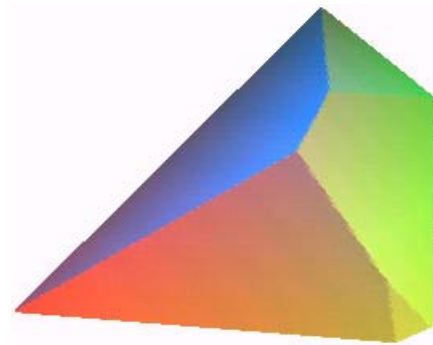


Figure 19.

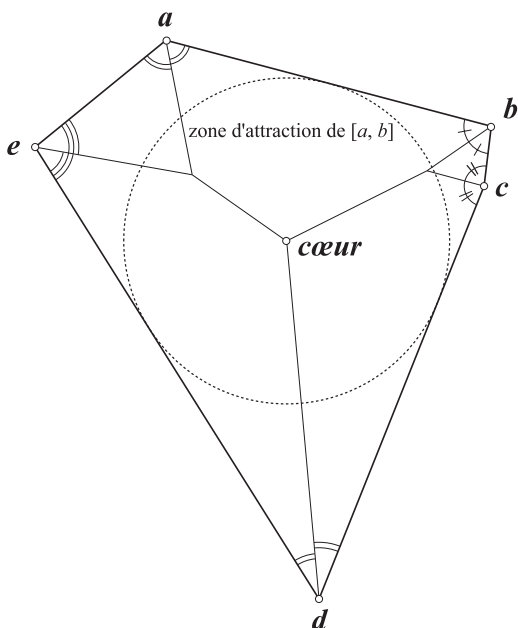


Figure 18.

Et un exemple avec une ligne non convexe (la frontière des zones d'attraction comporte des portions paraboliques) est représenté sur les figures 20 et 21

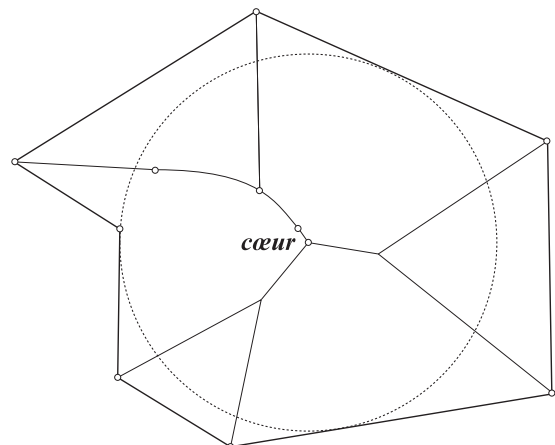


Figure 20.



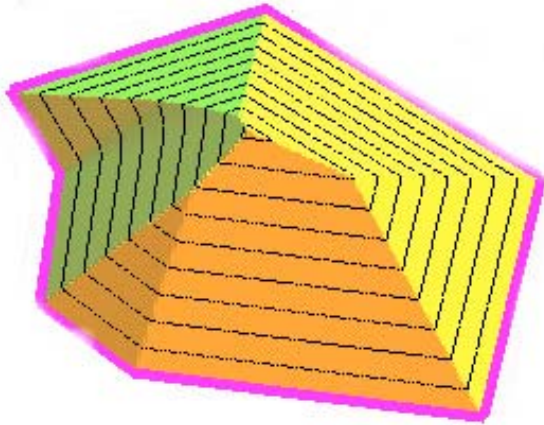


Figure 21.

Pour le cas d'une courbe de classe  $C^1$ , les lignes de niveau de  $f_X$  sont alors formées de portions de courbes parallèles à cette frontière.

b) Si  $X$  est borné, on peut considérer, au lieu de  $f_X$ , la fonction duale  $g_X$  donnant la borne supérieure des distances d'un point  $m$  aux points de  $X$  et regarder les propriétés de ses minimums. Pour un compact  $K$ , la notion duale de point-cœur est alors celle de centre d'un disque de rayon *minimum contenant*  $K$  (appelé *couvercle* de  $K$ ). Pour la France, ce centre se trouve entre Guéret et Argenton-sur-Creuse ; c'est donc le lieu du territoire où le point frontière le plus éloigné est à une distance la plus petite possible.

c) On pourrait aussi ne considérer que les frontières terrestres de la France, et donc chercher le point le plus éloigné à vol d'oiseau d'un pays étranger. Sans tenir compte de l'Angleterre, il s'agit alors de la pointe du Raz, pour aller en Belgique. Il serait également intéressant de déterminer les zones d'attraction de chaque pays frontalier.

d) Pour le cas d'une zone terrestre, il faudrait tenir compte de la sphéricité de la terre, et donc transposer les notions de PEM sur la sphère. J'ai lu par exemple que le cœur du Pacifique se trouve à la longitude  $47^\circ 30'$  sud et la latitude  $120^\circ$  ouest, avec un rayon de 2575 km. Ce résultat doit bien sûr tenir compte de la sphéricité de la terre.

e) Au lieu d'utiliser la distance euclidienne, on pourrait utiliser la distance « temps de parcours moyen en voiture » ou « temps de parcours avec les transports en commun ».

f) On pourrait aussi utiliser les résultats de la morphologie mathématique, étudiant les propriétés de l'addition de Minkowski ; celle-ci est définie, deux parties  $X$  et  $Y$  et un point  $o$  étant donnés, par

$$X \oplus Y = \bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} o + \vec{ox} + \vec{oy},$$

notion ne dépendant pas de  $o$  à translation près.

En effet, si  $Y$  est le disque (ouvert, fermé) de centre  $o$  et de rayon  $\alpha$ ,  $X \oplus Y$  n'est alors autre que le disque (ouvert, fermé) de centre  $X$  et de rayon  $\alpha$  défini ci-dessus.

On définit aussi l'*érodé* de  $X$  par  $Y$  :

$$X \ominus Y = {}^c({}^c X \oplus Y).$$

Si  $K$  est un compact, désignons par  $K_\alpha$  l'érodé de  $K$  par la boule ouverte de centre  $o$  et de rayon  $\alpha$ . Le cœur de  $K$  est alors l'érodé ultime  $K_{\alpha_0}$  de  $K$ , tel que pour  $\alpha > \alpha_0$ ,  $K_\alpha$  soit vide.

g) On peut enfin généraliser à l'espace. Que deviennent alors le triangle aigu et le rectangle du théorème 2 ?

Remerciements à Yann Spadari, élève de MPSI, pour avoir rentré à la main les coordonnées de 100 points de la frontière française et donné des idées, et à Alain Esculier pour avoir laissé tourner son ordinateur une heure pour sortir la France en tas de sable et donné des suggestions intéressantes pour la création de ces figures.

## Bibliographie

Cet article est basé sur le problème de CAPES de géométrie de 1986 (dont je recherche l'auteur) pour ce qui concerne les courbes de niveaux et zones d'attraction, et, pour ce qui concerne les tas de sable, sur l'article de F. Jamm et D. Parlongue, *Gazette des mathématiciens*, juillet 2002, pp. 65–82.

# QUADRATURE

## Appel à auteurs

**Quadrature**, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques.**

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, des enseignants et des étudiants...

**Quadrature** est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne. On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

**Quadrature** est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.

Vous souhaitez contribuer activement à la revue. Venez enrichir nos différentes rubriques et proposez-nous :

- ✓ articles de revue,
- ✓ brèves scientifiques,
- ✓ forum des lecteurs,
- ✓ manifestations,
- ✓ reportages,
- ✓ images mathématiques,
- ✓ analyses d'ouvrages et de logiciels,
- ✓ sites internet spécialisés en mathématiques,
- ✓ nouvelles, fantaisies mathématiques...

N'hésitez pas à prendre contact avec notre bureau de rédaction :



### **Quadrature**

EDP Sciences

PA de Courtabœuf

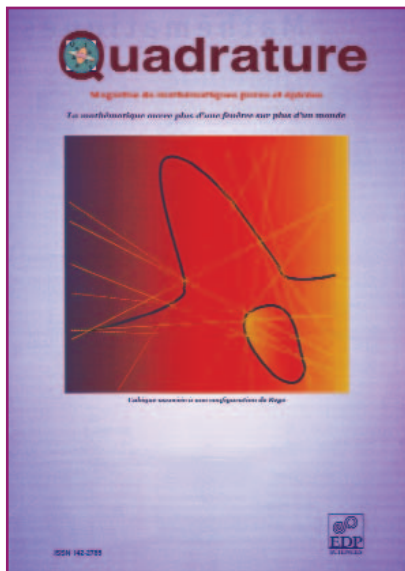
17 avenue du Hoggar

BP 112

91944 Les Ulis Cedex A

Tél. : 01 69 18 75 75 • Fax : 01 69 07 45 17

E-mail : [quadrature@edpsciences.org](mailto:quadrature@edpsciences.org)



# Quadrature

## Le magazine de mathématiques pures et épicées

**Quadrature**, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques.**

La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

**Quadrature** est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large "coin des problèmes" permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

**Quadrature** est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université.



## BULLETIN D'ABONNEMENT Quadrature

Mme     Mlle     M.

Nom .....

Prénom .....

Profession .....

Institution .....

.....

Adresse .....

.....

.....

Code Postal .....

Ville .....

Pays .....

e-mail .....

### Veillez enregistrer mon abonnement :

- Pour **1 an** (4 numéros) :
- Europe (TVA 2,1% incluse) ..... 31,50 €
  - Reste du monde (Hors Taxe) ..... 36,75 €
- Pour **2 ans** (8 numéros) :
- Europe (TVA 2,1% incluse) ..... 57,50 €
  - Reste du monde (Hors Taxe) ..... 68,25 €

### Paiement :

- Envoyez-moi une facture proforma
- Chèque joint (à l'ordre d'EDP Sciences)
- Carte de Crédit :
- Visa     Eurocard     American Express
- Carte No .....
- Date de validité .....

date/signature



Veillez retourner ce coupon à :

**EDP Sciences - Service Abonnement**

17, avenue du Hoggar • B.P. 112 • PA de Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A • France

Tél. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 - E-mail : subscribers@edpsciences.org