INÉGALITÉS

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant n!$.
2. Montrer que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1+x$; en *déduire* que pour $x<1$, $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$; représenter ces deux inégalités.
3. Montrer que $x, y \geqslant 2 \Rightarrow x+y \leqslant xy$. Etudier la réciproque.
   (a) Montrer, pour $x, y \geqslant 0$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$; quel est le cas d'égalité ?
   (b) En déduire, pour $x, y, z \geqslant 0$, un minorant de $(x+y)(y+z)(z+x)$, dont on donnera aussi le cas d'égalité.
4. Pour quelles valeurs de $a>1$ a-t-on $\sum_{k=0}^{n-1} a^k \leqslant a^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$?
   En déduire que le nombre des ancêtres de la n-ième génération au dessus de la nôtre est supérieur à la totalité de nos ancêtres jusqu'à la $n-1$ième.
   REP : $a \geqslant 2$.
5. :
   (a) Montrer que si $x, y > 0$, alors $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.
   (b) En déduire que si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont n réels strictement positifs, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$.
   Indication : $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geqslant 2$.
6. :
   (a) Montrer que si $x>0$, alors $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
   (b) En déduire que si $a>0$, alors la moyenne arithmétique des réels $1, a, a^2, a^3, .., a^{2n}$ est $\geqslant a^n$.
   Indication : diviser par a^n et regrouper deux par deux.
7. Compléter par les bons connecteurs logiques, et justifier :
   (a) $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ ... $a = -b$
   (b) $|a| \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant b$ ... $a \geqslant -b$
   (c) $|a| \geqslant b \Leftrightarrow a \geqslant b$ ... $a \leqslant -b$ (avec $b \geqslant 0$)
8. Montrer que pour tout réel x et tout entier $q>0$ il existe un entier p tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2q}$. Exemple : $x = \pi$ et $q = 7$.
   REP : $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant \frac{1}{14}$.
9. Quel est le plus petit réel a tel que pour tout réel x on ait $x \leqslant x^2 + a$?
10. Hachurer la partie du plan définie par $\left(y - x^2\right)\left(x - y^2\right) \geqslant 0$.
11. Étudier et dessiner la partie du plan définie par $2 \leqslant |x| + ||y| - 3| \leqslant 4$.
12. Montrer, pour $x \in [0, 1[$ et n entier naturel : $1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}$.
    Représenter pour $n = 2$.
13. Soient a et b deux réels $\geqslant 0$.
    (a) Montrer $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$; quand a-t-on égalité ?

(b) En déduire $\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$; quand a-t-on égalité ?
REP : a) égalité ssi a ou $b=0$. b) égalité ssi $a=b$.

14. * Soit (E) l'équation à coefficients réels : $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0$ (n entier naturel non nul).

 (a) Supposons que cette équation possède une solution x réelle de valeur absolue $\geqslant 1$.
 Montrer que $|a_n x^n| \leqslant |x|^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$; en déduire que $|x| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{|a_k|}{|a_n|}$.

 (b) En déduire que les solutions de l'équation (E) ont toutes une valeur absolue $\leqslant M = \max\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{|a_k|}{|a_n|}, 1\right)$.

 PARTIES ENTIÈRES

15. * On considère la suite $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3$, etc...
 Montrer que $u_n = \left\lceil \sqrt{2n + 1/4} - 1/2 \right\rceil$.
 Indication : $u_n = a$ pour $\dfrac{a(a+1)}{2} \leqslant n < \dfrac{(a+1)(a+2)}{2}$, soit $\left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 2n + \dfrac{1}{4} < \left(a + 1 + \dfrac{1}{2}\right)^2$.
 LOGIQUE

16. Le théorème de Pythagore énonce que si un triangle ABC est rectangle en A alors $... = ...^2 + ...^2$.
 On donne à un élève un triangle de côtés 6, 7 et 8 : il conclut qu'il n'est pas rectangle car $64 \neq 61 = 49 + 36$.
 A-t-il utilisé le théorème de Pythagore ou bien sa réciproque ?

17. Soit $*$ un connecteur logique tel que si P est vrai et Q vrai, alors $P * Q$ est vrai et si P est vrai et Q faux, alors $P * Q$ est faux ; montrer que si $P * Q$ prend les mêmes valeurs de vérité que non$Q*$non$P$, mais pas les mêmes valeurs de vérité que $Q * P$, alors $*$ est le connecteur d'implication.

18. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Exprimer en langage formalisé l'énoncé : la fonction f garde un signe constant sur I. En donner la négation.

19. P : Il y a toujours un médecin de garde
 Q : Il y a un médecin toujours de garde
 Soit M l'ensemble des médecins et $G(t)$ l'ensemble des médecins de garde à l'instant t.
 Écrire P et Q en langage formalisé.

20. Déterminer la valeur de vérité des énoncés suivants (avec justification)

 (a) $\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \ / \ x^3 - mx + 1 = 0$.
 (b) $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ \forall m \in \mathbb{R} \ \ x^3 - mx + 1 = 0$.
 (c) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists \ m \in \mathbb{R} \ / \ x^3 - mx + 1 = 0$.

21. Soit f la fonction carré ; vrai ou faux ?

 (a) $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)$
 (b) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \ / \ f(x+y) = f(x)$ (illustrer)

22. Vrai ou faux ?

 (a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \Longrightarrow x > 2$
 (b) $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ x > 1 \Longrightarrow x > 2$

23. Déterminer $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 1 \Leftrightarrow x > 2\}$ et $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 1 \Leftrightarrow x \leqslant 2\}$.

24. On considère les énoncés P et Q concernant une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
    $P : \forall a \geqslant 0 \quad \exists m \geqslant 0 \quad \forall x \in [-a,a] \quad |f(x)| \leqslant m$
    $Q : \exists m \geqslant 0 \quad \forall a \geqslant 0 \quad \forall x \in [-a,a] \quad |f(x)| \leqslant m$
    Donner un exemple de f ne vérifiant pas P et un exemple de f vérifiant P mais pas Q.

25. Un théorème difficile à démontrer affirme que si x est un rationnel non nul alors e^x est un irrationnel. Quel théorème concernant la fonction ln donne la *contraposée* de ce théorème ?

26. Soit A une partie de $\mathbb{R}$; donner la définition en langage formalisé de "A possède un plus petit élément" ; donner un exemple de partie n'ayant pas de plus petit élément ; montrer l'*unicité* du plus petit élément d'une partie.

27. Soit f , g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
    (a) Montrer que si f et g sont croissantes alors $f \circ g$ aussi.
    (b) Montrer que si $f \circ f$ et $f \circ f \circ f$ sont strictement croissantes alors f est strictement croissante.

28. Sachant que $\sqrt{6}$ est irrationnel, montrer que $\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ est irrationnel.

29. Rationnels ou irrationnels ?
    (a) $\sqrt{8+\sqrt{63}} + \sqrt{8-\sqrt{63}}$
    (b) $\sqrt{7+\sqrt{48}} + \sqrt{7-\sqrt{48}}$
    REP a) irrationnel, b) rationnel, et même entier.

30. Montrer que si a, a', b, b' sont 4 rationnels, b et $b' \geqslant 0$, vérifiant $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$ avec $\sqrt{b}$ irrationnel, alors $a = a'$ et $b = b'$.

31. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (g,h) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f = g + h$, avec g symétrique et h antisymétrique ($g(x,y) = g(y,x)$ et $h(x,y) = -h(y,x)$).

32. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $T > 0$; montrer qu'il existe un unique couple d'applications (g,h) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f = g + h$ avec g T-périodique et h nulle sur $[0, T[$.

33. Montrer que
    $$\forall x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N} \quad \exists a \in \mathbb{N}^* \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} n < a \Rightarrow \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor \\ n \geqslant a \Rightarrow \lfloor nx \rfloor \geqslant n \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases}$$
    Indication : écrire $x = \lfloor x \rfloor + \text{frac}(x)$; On donnera une expression de a en fonction de x.
    REP : $a = \dfrac{1}{\lceil \text{frac}(x) \rceil}$.

SOMMES ET PRODUITS

34. Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) b_k + \sum\limits_{k=0}^{n} a_{k+1} (b_{k+1} - b_k)$ (formule de "sommation par parties").
    REP : $a_{n+1} b_{n+1} - a_0 b_0$.

35. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=n+1}^{2n} k$.

36. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.
    REP : $\dfrac{(n+1)^n}{n!}$.

37. :
    (a) Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i 2^i$ en calculant $2T_n$.

(b) Déterminer $S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{\min(i,j)}$.
Rep : $T_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2$
Rep : $S_n = 6.2^n - 2n - 5$.

38. :

(a) Calculer $T_n = \sum_{i=0}^{n} i2^i$ en calculant $2T_n$.

(b) Déterminer $S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{\max(i,j)}$.
Rep : $T_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2$
Rep : $S_n = (2n-1)\,2^{n+1} + 3$.

39. n entier naturel fixé ; $f(p,q) = \sum_{k=0}^{n} k^p (n-k)^q$; montrer que $f(p,q) = f(q,p)$, simplifier $f(p+1, q(1)) + f(p, q+1)$; en déduire $f(1,1)$, ainsi que $f(2,2)$ en fonction des $S_p = f(p,0)$ pour $0 \leqslant p \leqslant 4$.
REP : $f(p+1,q) + f(p,q+1) = nf(p,q)$, donc $f(p,q) = nf(p-1,q) - f(p-1,q+1)$.
$f(1,1) = nf(0,1) - f(0,2) = nS_1 - S_2$
$f(2,2) = nf(1,2) - f(1,3) = n(S_2 - 2S_3) + S_4$

40. Calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ et déterminer sa limite quand n tend vers l'inifini.
REP : $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

41. Montrer qu'il existe a, b, c, d indépendants de k tels que $\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{a}{k^2 + bk + 1} + \frac{c}{k^2 + dk + 1}$; en déduire une expression sans somme de $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.
REP : $\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1/2}{k^2 - k + 1} - \frac{1/2}{k^2 + k + 1}$.
$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{n^2 + n + 1}$.
RÉCURRENCES

42. Démontrer par récurrence sur n que tout entier $n \geqslant 8$ peut s'écrire sous la forme $3a + 5b$ avec a et b entiers naturels.

43. Démontrer par récurence forte que tout entier $\geqslant 2$ est décomposable en produit de facteurs premiers.

44. Soit a un nombre impair ; montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a^{2^n} - 1$ est divisible par 2^{n+2}.

45. Démontrer par récurrence forte que tout entier naturel non nul est somme de puissances de 2 distinctes ($\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists K \subset \mathbb{N} \ / \ n = \sum_{k \in K} 2^k$).

46. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute famille de n réels strictement positifs $x_1, x_2, ..., x_n$, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$.

47. Soit x un réel tel que $a = x + \frac{1}{x}$ soit entier.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ est alors un entier.

(b) Calculer le(s) nombre(s) x et les 4 premiers termes de la suite pour $a = 4$.
REP a) utiliser $a_{n+1} = a.a_n - a_{n-1}$.
REP b) $x = 2 \pm \sqrt{3}$; $a_0 = 2; a_1 = 4; a_2 = 14; a_3 = 52$.

48. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $2!4!....(2n)! \geqslant ((n+1)!)^n$.

49. Démontrer que pour tous entiers naturels a et b, $(ab)!$ est divisible par a^b et b^a.

50. Démontrer que $u_n = \dfrac{(4n)!}{n!}$ est divisible par 24^n ; trouver de même un diviseur de $\dfrac{(5n)!}{n!}$.

    Indication : montrer que 24 divise $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; $\dfrac{(5n)!}{n!}$ est divisible par 120^n.

51. Montrer que $\dfrac{(n!)^n}{1!2!...(n-1)!} = 1^1.2^2....n^n$
    (a) Par récurrence sur n.
    (b) Directement.

52. On définit une suite par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n(4 - u_n)/2$; calculer u_n en fonction de n.

    Rep : $\dfrac{2^{2^n}-1}{2^{2^n-1}}$.

53. Algorithme de Chanda Sutra.
    Soit a un réel donné. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n :
    $$u_{2n} = (u_n)^2$$
    $$u_{2n+1} = a(u_n)^2$$
    (a) Que vaut u_n (justifier)?
    (b) Par combien de multiplications obtient-on a^{100} par cette méthode ?
    REP : $u_n = a^n$; $u_{100} = u_{50}^2; u_{50} = u_{25}^2; u_{25} = au_{12}^2; u_{12} = u_6^2; u_6 = u_3^2; u_3 = au_1^2$: 8 multiplications (6 élévations au carré et 2 multiplications par a).

54. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

55. Montrer que $2^{4^n} - 2$ est divisible par 7, pour tout naturel n.

56. Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{Z}$ dans lui-même vérifiant $f(n+m) = f(n) + f(m)$ pour tous entiers n et m.

    REP : $f(n) = n$.

57. $\mathbb{Z}^2$ est muni des opérations naturelles $(n,m) + (n',m') = (n+n', m+m')$ et $k(n,m) = (kn, km)$, pour tous entiers n, n', m, m', k.

    Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{Z}^2$ dans lui-même vérifiant $f((n,m) + (n',m')) = f(n,m) + f(n',m')$ pour tous entiers n, n', m, m'.

    On montrera qu'une telle application vérifie $f(k(n,m)) = kf(n,m)$ pour tous entiers n, m, k, et ensuite, on utilisera le fait que $(n,m) = n(1,0) + m(0,1)$.

    REP : $f(n,m) = (an + bm, cn + dm)$.

58. Montrer par récurrence sur n que l'on peut toujours séparer tous les timbres d'une planche rectangulaire de n timbres sur m timbres en $nm - 1$ déchirures.

    Indication : chaque déchirure augmente le nombre de "morceaux" d'une unité.

59. Soit u_n le nombre maximal de parts (de formes quelconques) que l'on peut obtenir en coupant une pizza par n coups de couteau rectilignes (ou, plus mathématiquement, le nombre maximal de régions déterminées par n droites dans un plan).

    Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1} et en déduire la valeur de u_n.

    REP : $u_n = u_{n-1} + n$

60. Où se trouve l'erreur dans le raisonnement par récurrence forte suivant ?
    Soit a un réel ; montrons que $a^n = 1$ pour tout naturel n. C'est vrai pour $n = 0$; H.R. : pour tout entier k de 0 à n, on a $a^k = 1$ Alors $a^{n+1} = \dfrac{a^n a^n}{a^{n-1}} = \dfrac{1.1}{1} = 1$, ce qui achève la récurence forte.

61. On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
    Montrer que $F_{2n} = F_n (F_{n-1} + F_{n+1})$ et $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$.

62. On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. On aimerait trouver un minorant de F_n pour $n \geqslant 1$ de la forme $a.b^n$, avec a et $b > 0$.
    (a) Déterminer la plus grande valeur de b de sorte que dans la démonstration par récurence double de $F_n \geqslant a.b^n$, la démonstration de l'hérédité reste valable ; on trouvera $b = \varphi$.
    (b) Trouver alors la meilleure valeur de a telle que l'initialisation (pour $n = 1$ et 2) soit valable.
    (c) Trouver de même une majoration de F_n.
    REP : $\varphi^{n-2} \leqslant F_n \leqslant \varphi^{n-1}$

63. On définit la suite de Fibonacci par $F_{-1} = 1, F_0 = 0, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et on définit une suite (u_n) par $u_0 = a, u_1 = b, u_n = u_{n-1}u_{n-2}$.
    (a) Montrer que pour tout naturel $n \quad u_n = a^{F_{n-1}} b^{F_n}$.
    (b) On définit une suite (v_n) par $v_0 = 0, v_1 = 1, v_n = v_{n-1}v_{n-2} + v_{n-1} + v_{n-2}$. On demande d'exprimer v_n à l'aide de la suite de Fibonacci (on se ramènera au cas précédent).
    Indication : $v_n + 1 = (v_{n-1} + 1)(v_{n-2} + 1)$.
    REP : $v_n = 2^{F_n} - 1$.

64. (suite de Sylvester) :
    Soit (u_n) une suite définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_1 ... u_n + 1$; montrer que pour tout $n \geqslant 2, 2^{2^{n-2}} \leqslant u_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

65. Soit (u_n) une suite de réels.
    (a) Montrer que si $u_k \leqslant \sum\limits_{l=1}^{k} \dfrac{u_l}{l}$ pour tout k entre 1 et n, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \leqslant \dfrac{n+1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k}$.
    On suppose que (u_n) vérifie $u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$ pour tous entiers $i, j \geqslant 1$ (elle est dite sous-additive).
    (b) Montrer que $nu_{n+1} \leqslant 2 \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
    (c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a l'encadrement $u_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k} \leqslant nu_1$ (la première inégalité sera montrée par récurrence forte, la deuxième directement).

    Appliquer à $u_n = \sqrt{n}$.

66. Soit p_n le n-ième nombre premier.
    (a) Montrer (sans récurrence) que $p_{n+1} \leqslant p_1 ... p_n + 1$.
    (b) Montrer (par récurrence forte) que $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.
    Indication pour a : le plus petit diviseur premier de $p_1 ... p_n + 1$ est forcément $> p_n$.

    FORMULE ET COEFFICIENTS DU BINÔME

67. :
    (a) Montrer que si $x > 0$, alors $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
    (b) En déduire que si $a, b > 0$, $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$.

68. Montrer que pour tout naturel n, $(n+1)^n - 1$ est un multiple de n^2.

69. Pour n entier impair, $n = 2p+1$, on pose $f(a,b) = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$, $g(a,b) = \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$.

    (a) Montrer que $g(a,b) = f(b,a)$ à l'aide d'un changement d'indice.

    (b) En déduire que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} a^k b^k \left(a^{n-2k} + b^{n-2k}\right)$.

    (c) Formule similaire pour n pair ?

70. Calculer $\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$ de deux façons différentes.

    Rep : $2^{n+1} - 1$.

71. Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$ (intervertir les deux signes de sommation).

    Rep : 3^n.

72. Calculer : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} a^i b^{j-i} c^{n-j}$

    Rep : $(a+b+c)^n$

73. Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{i+j}{i}$.

    Rep : $\binom{2n+2}{n+1} - 1$.

74. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^k+1\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(x^k+1\right)^n$.

75. Montrer que $P = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est égal à $2^{3-n}.3^{5-n}.4^{7-n}...n^{n-1}$.

76. Montrer que $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$.

    Indication : $(1+1)^{2n}$.

77. On pose $f(x) = (1+x)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)^2$. Ecrire de deux façons différentes le coefficient de x^n dans $f'(x)$.

    En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n}$.

78. Soit (f_n) une suite d'entiers du type fibonaccien vérifiant pour tout naturel n : $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Montrer pour tous naturels n et p :

$$f_{n+2p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f_{n+k}$$

    Indication : récurrence sur p.

79. Soient a et b deux réels > 0 et n un entier naturel > 0. On demande de déterminer le plus grand terme du développement de $(a+b)^n$ par la formule du binôme.

    Indication : poser $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ et déterminer ses variations à partir du calcul de $\frac{u_k}{u_{k-1}}$.

    REP : u_k avec $k = \left\lfloor \frac{a}{a+b}(n+1) \right\rfloor$.

    FORMULE DE BERNOULLI

80. $f(x) = x^n$ avec n entier $\geqslant 1$: calculer la dérivée de f en utilisant la formule de Bernoulli.

81. Soient trois entiers naturels non nuls m, n, a avec $m \geqslant n$

   (a) Montrer que $m^a - n^a \geqslant (m-n)\,a$.

   (b) Montrer que si $m^a = n^a + a$, alors $a = 1$.

ENSEMBLES

82. On a dans les réels : $x - (y+z) = (x-y) - z$ et $x - (y-z) = (x-y) + z$
Pouvez-vous trouver, et démontrer, des formules similaires dans les ensembles ?

83. E, G, F, H étant 4 ensembles, montrer :

   (a) $(E \cup F) \times (G \cup H) = (E \times G) \cup (F \times G) \cup (E \times H) \cup (F \times H)$.

   (b) $(E \cap G) \times (F \cap H) = (E \times F) \cap (G \times H)$.

84. Soient X, Y, Z 3 parties d'un ensemble E ; montrer que

$$(X \cap Y = X \cap Z) \Leftrightarrow \left(X \cap \overline{Y} = X \cap \overline{Z}\right)$$

85. Soient X, Y, Z 3 ensembles.

   (a) Montrer que $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$; on note cet ensemble $X \bigtriangleup Y$.

   (b) Montrer que $Z \bigtriangleup X = Z \bigtriangleup Y \Rightarrow X = Y$.

86. Dans cet exercice les lettes majuscules désignent des ensembles.
On pose $X \bigtriangleup Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$, et on admet que $X \bigtriangleup (Y \bigtriangleup Z) = (X \bigtriangleup Y) \bigtriangleup Z$.
Faire une figure illustrant $X \bigtriangleup Y \bigtriangleup Z$ et une figure illustrant $X \bigtriangleup Y \bigtriangleup Z \bigtriangleup T$.
Montrer que x appartient à $X_1 \bigtriangleup X_2 \bigtriangleup .... \bigtriangleup X_n$ si et seulement si x appartient à un nombre impair d'ensembles X_k (plus précisément ssi l'ensemble K des indices k tels que x appartient à X_k possède un nombre impair d'éléments).

87. E est un ensemble, A et B en sont des parties.

   (a) Montrer que si $A \cup B = E$ alors pour toutes parties X et Y de E, $\left\{\begin{array}{l} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{array}\right. \Rightarrow X = Y$

   (b) Etudier la réciproque de a.

   (c) Montrer que si $A \cap B = \varnothing$ alors étant données une partie X_1 de A et une partie X_2 de B, il existe une partie X de E telle que $\left\{\begin{array}{l} X \cap A = X_1 \\ X \cap B = X_2 \end{array}\right.$.

   (d) Etudier la réciproque de c.

TRIGO

88. : Calculer $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{18}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\dfrac{\pi}{18}}$.
Rep : 4.

89. $a + b + c = \dfrac{\pi}{2}$; calculer $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a$.

90. : $P = \cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}$

   (a) Calculer $P \sin\dfrac{\pi}{7}$, en déduire P.

   (b) Montrer par linéarisation que $4P = \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} - 1$

   (c) En déduire une équation du troisième degré dont $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ est solution.

Rep : $P = -1/8$; ; équation $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

91. $S = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$

    (a) Linéariser $S\sin\dfrac{\pi}{7}$, en déduire S.

    (b) Vérifier que $S = \cos\dfrac{2\pi}{7} - \cos\dfrac{3\pi}{7} - \cos\dfrac{\pi}{7}$.

    (c) En déduire une équation du troisième degré dont $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ est solution.

    Rep : $S = -1/2$; équation $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

92. Montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} = \cos\dfrac{\pi}{9}$; en déduire une équation du troisième degré dont $2\cos\dfrac{\pi}{9}$ est solution.

    REP : $x^3 - 3x - 1 = 0$.

93. Montrer que $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} = \cos\dfrac{\pi}{9}$; en déduire par linéarisation la valeur de $P = \cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}$.

    REP : 1/8.

94. Montrer que $\sin\dfrac{\pi}{9} + \sin\dfrac{2\pi}{9} = \sin\dfrac{4\pi}{9}$; en déduire par linéarisation la valeur de $P = \sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}\sin\dfrac{4\pi}{9}$.

    REP : $\sqrt{3}/8$.

95. Soient a, b, c 3 réels ; à l'aide du trinôme du second degré $P(x) = x^2 + 2(\cos a\cos b)x + \cos^2 a + \cos^2 b - 1$, déterminer une factorisation (la plus poussée possible) de l'expression $E = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c - 1$.

    REP : $E = (\cos c - \cos(a+b))(\cos c - \cos(a-b)) = -4\sin\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{-a+b+c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b+c}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)$.

96. :

    (a) Calculer $\cos^2\dfrac{\pi}{16} + \cos^2\dfrac{3\pi}{16} + \cos^2\dfrac{5\pi}{16} + \cos^2\dfrac{7\pi}{16}$.

    (b) Généraliser cette formule.

    REP a : $2 + \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + \cos\dfrac{3\pi}{8} + \cos\dfrac{5\pi}{8} + \cos\dfrac{7\pi}{8}\right) = 2$.

97. :

    (a) Vérifier que si $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $2\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$.

    (b) En déduire la valeur de $\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$ (n radicaux).

    Rep : $2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

98. On pose $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$;

    (a) Montrer que $f(x) \geqslant 1$ pour tout x.

    (b) Réduire l'intervalle d'étude et étudier f ; tracer la courbe.

99. Une fonction sinusoïdale est une fonction de la forme $x \mapsto a\cos(kx + b) + c$; montrer, que pour $n = 0, 1, 2, 4, 6$, la fonction $f_n : x \mapsto \cos^n x + \sin^n x$ est sinusoïdale, mais qu'elle ne l'est pas pour $n = 3$.

    REP : 1/4*cos(3*x)+3/4*cos(x)-1/4*sin(3*x)+3/4*sin(x), 1/4*cos(4*x)+3/4, 3/8*cos(4*x)+5/8.

100. Un segment de longueur constante est tel que ses extrémité A et B coulissent sur deux axes perpendiculaires en C. Pour quelle(s) position(s) du segment $[AB]$ le triangle ABC a-t-il un périmètre (resp une aire) maximal(e) (resp minimal(e))?

     On exprimera l'aire et le périmètre en fonction de l'angle α en A.

101. Un point C décrit un cercle de diamètre $[AB]$; I est le milieu de $[AC]$. Quel est le maximum de l'angle ABI ?
Rep : arcsin 1/3.
FONCTIONS, LIMITES

102. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ T-périodique. On pose $g(x) = f(x + T/2)$.
montrer f paire ssi g paire, idem avec impaire.

103. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\exists T > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{T}{2} + x\right) = f\left(\frac{T}{2} - x\right) = -f(x)$$

et g définie par $g(x) = f\left(\frac{T}{4} - x\right)$

   (a) Etudier la périodicité et la parité de f et g.
   (b) Donner un exemple de tel couple (f, g)

104. Déterminer les limites des fonctions suivantes en x_0.
   (a) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 \sin x - 3}{x\sqrt{x} - 2\cos x}$, $x_0 = +\infty$
   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-3}}{\sqrt{15-x} - \sqrt{x^2-27}} x_0 = 6$ (rep 1/13)
   (c) $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin 3x}{1 - \sqrt{2}\cos x}, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ (rep $2\sqrt{2}$)

105. Démontrer qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall x, m \in \mathbb{R} \qquad m^2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = f_1(m)$ ou $x = f_2(m)$, et que l'une des deux est continue sur $\mathbb{R}$.

106. :
   (a) Asymptote en $+\infty$ à la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x+1}$
   Rep: $y = x - 1$.
   (b) Limite en $\pi/6$ de f telle que $f(x) = \dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos x + \cos 5x}$ (Rep : 1/3)
   (c) Limite en 1 de f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2+3} - 2\sqrt{2-x^2}}$ (Rep : 1/2)

107. :
   (a) Asymptote en $+\infty$ à la courbe de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+x}}{x+2}$rep: $y = x - 2$
   (b) Limite en $\pi/5$ de f telle que $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin 4x}{\cos 2x + \cos 3x}$ rep -1/2sin(pi/5)
   (c) Limite en 2 de f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{\sqrt{2x} - \sqrt{3x-2}}$ rep : -2

   DERIVÉES

108. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de limite nulle aux deux infinis. Pour $-1 < x < 1$, on pose $g(x) = f\left(\dfrac{x}{1-|x|}\right)$
   (a) Prolonger g par continuité en -1 et 1.
   (b) Montrer que g est dérivable en 1 de dérivée nulle ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$;
   (c) Donner un exemple avec f non constante et tracer les courbes de f et g.

109. Limite en ??? de f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-3}}{\sqrt{15-x} - \sqrt{x^2-27}}$, en utilisant la petite règle de l'Hospital.

110. Limite en ??? de f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin 3x}{1 - \sqrt{2}\cos x}, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ en utilisant la petite règle de l'Hospital (rep $2\sqrt{2}$).

111. Limite en ??? de f telle que $f(x) = \dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos x + \cos 5x}$, en utilisant la petite règle de l'Hospital (rep : $1/3$).

112. Limite en ??? de f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2+3} - 2\sqrt{2-x^2}}$,en utilisant la petite règle de l'Hospital (rep : $1/2$).

113. Limite en ??? de f telle que $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin 4x}{\cos 2x + \cos 3x}$, en utilisant la petite règle de l'Hospital.
   rep : $-1/2\sin(\pi/5)$.

114. Limite en ??? de f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{\sqrt{2x} - \sqrt{3x-2}}$. en utilisant la petite règle de l'Hospital.
   rep : -2,

115. Etudier la dérivabilité en 0 à droite de f définie par $f(x) = \sqrt{\sin(x^n)}$ suivant les valeurs de n entier >0.

116. Etudier la dérivabilité en $\frac{\pi}{2}$ de f définie par $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$.

117. Montrer que $\sin^2 x \tan x \geqslant x^3$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (dériver trois fois).

118. Soit $f(x) = 2x^2, g(x) = x\hat{}2 + 2$; déterminer les tangentes communes à C_f et C_g ; figure.
   REP :$((1,2),(2,6))$.

119. Soit $f(x) = x^2, g(x) = 1/x$; déterminer les tangentes communes à C_f et C_g ; figure.
   REP :$((-2,4),(-1/2,-2))$.

120. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x$.
   REP : dérivée nulle en 0,$\pi/2, 2\pi/3, \pi$.
   Variantes : $\dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x, \cos x + \dfrac{1}{3}\cos 3x + \dfrac{1}{5}\cos 5x$, avec des sinus, etc....

121. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.2*sin(x)*(4*cos(x)^2+1)/(2*cos(x)-1)^2/(2*cos(x)+1)^2

122. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.-1/2*sin(x)*(4*cos(x)^2+1)/cos(x)^2

123. Soient $0 < a < b$ deux réels. On rappelle que la moyenne arithmétique de a et b est $\dfrac{a+b}{2}$, et la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$.
   On pose $f(t) = \sqrt{(ta + (1-t)b)(tb + (1-t)a)}$ (moyenne de Ramanujan).
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f et réduire l'intervalle d'étude.
   (b) Variations.
   (c) En déduire $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

   LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

124. On pose $f(x) = \sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; montrer que $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

125. M étant le point courant de cordonnées $(x, \ln x)$ de la courbe de la fonction ln, étudier les variations de la pente de la droite (OM) en fonction de x.

126. Trouver une formule utilisant la partie entière et le logarithme décimal donnant le premier chiffre d'un entier écrit en base 10.

127. En physique on définit l'ordre de grandeur $f(x)$ d'un réel positif x non nul comme la plus grande puissance de 10 inférieure ou égale à x ; par exemple $f(1732) = 10^3$ (attention "puissance de 10" signifie ici : le nombre 10 élevé à une puissance entière, pouvant être négative).

    (a) Donner une formule pour $f(x)$ en utilisant la fonction partie entière.

    (b) Donner un exemple où $f(x_1x_2)$ est différent de $f(x_1)f(x_2)$ mais montrer que cette formule est exacte si x_2 est une puissance de 10.

128. :

    (a) Montrer que pour $|x| < 1$, $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$ (faire une figure).

    (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$, puis que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

129. Tracer les courbes des fonctions f définies par $f(x) = a^{\ln(x)}$ suivant les diverses valeurs de a.

130. On pose $f(x) = e^x + ke^{-x}$.
     Montrer que pour k non nul, C_f possède toujours un axe ou un centre de symétrie.

131. $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$; montrer que la courbe de f possède un centre de symétrie. Etudier f et tracer sa courbe.

132. M étant le point courant de cordonnées (x, e^x) de la courbe de la fonction exp, étudier les variations de la pente de la droite (OM) en fonction de x.

133. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.

134. Dérivée multiplicative.

    (a) Soit f une fonction strictement positive et dérivable en x. On désigne par "taux d'accroissement multiplicatif" le nombre $\Delta(u) = \left(\dfrac{f(x+u)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{u}}$. Quelle est la limite de $\Delta(u)$ quand u tend vers 0 ?

    (b) Pour une fonction f strictement positive et dérivable, on appelle dérivée multiplicative de f et on note $D_m(f)$ la fontion qui à x fait correspondre la limite de $\Delta(u)$ quand u tend vers 0.
    Montrer les formules suivantes :

$D_m(fg) = D_m(f)D_m(g)$, $D_m(f^\alpha) = (D_m(f))^\alpha$, $D_m(f^g) = (D_m(f))^g f^{g'}$; $D_m(f) = D_m(g)$ ssi $f = kg$.

135. Le "log star".
     On désigne par f_n la fonction $\log_2 \circ \log_2 \circ ... \circ \log_2$ (n itérations), et on pose, pour $x > 1$ $\log_2^*(x) = \min\limits_{f_n(x) \leqslant 1} n$.

    (a) Que vaut $\log_2^*(x)$ sur $]1, 2]$?

    (b) Définir $\log_2^*(x)$ par morceaux ; tracer sa courbe sur]1,5].

136. Inégalité arithmético-géométrique.
     Démontrer par récurrence que pour n réels positifs $a_1, a_2, ..., a_n$, on a : $\dfrac{a_1 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1...a_n}$.
     Indication : pour le passage de n à $n+1$, appliquer l'hypothèse de récurrence aux n premier termes, et démontrer que le minorant de $\dfrac{a_1 + ... + a_{n+1}}{n+1}$ obtenu est $\geqslant \sqrt[n+1]{a_1...a_{n+1}}$ en posant $x = \sqrt[n]{a_1...a_n}$ et en étudiant une fonction de x.
     APPLICATIONS

137. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$ et soient a, b, a', b' 4 réels vérifiant $a < b$, $c < d$.

    (a) Démontrer que $R = f^{-1}([a,b] \times [c,d])$ est un rectangle plein dont on donnera les coordonnées des sommets.

    (b) Déterminer le plus petit rectangle du type $[a', b'] \times [c', d']$ contenant R.

138. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$ et soient a, b, a', b' 4 réels vérifiant $a < b$, $c < d$.
    (a) Démontrer que $R = f([a,b] \times [c,d])$ est un rectangle plein dont on donnera les coordonnées des sommets.
    (b) Déterminer le plus petit rectangle du type $[a', b'] \times [c', d']$ contenant R.

139. On considère une application f de E dans E vérifiant $f^2 (= f \circ f) = f$.
    (a) Montrer que si f est injective ou surjective alors $f = id_E$.
    (b) Donner un exemple avec $E = \mathbb{R}^2$ autre que l'identité ou une fonction constante.

140. On considère une application f de E dans E vérifiant $f^3 (= f \circ f \circ f) = f$.
    (a) Montrer que si f est injective ou surjective alors $f^2 = id_E$.
    (b) Donner un exemple avec $E = \mathbb{R}^3$ de telle f ne vérifiant ni $f^2 = f$ ni $f^2 = id_E$.

141. On considère une application f de E dans E vérifiant $f^3 (= f \circ f \circ f) = id_E$.
    (a) Montrer que f est bijective en utilisant la méthode "deus ex machina".
    (b) Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par une expression du type $f(z) = az + b$ vérifiant $f^3 = id_E$.
    Les interpréter géométriquement.

142. Soit f une application de E vers F. On note $\overrightarrow{f}$ l'application de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(F)$ qui à toute partie X de E fait correspondre $f(X)$, et $\overleftarrow{f}$ l'application de $\mathcal{P}(F)$ vers $\mathcal{P}(E)$ qui à toute partie Y de F fait correspondre $f^{-1}(Y)$.
    (a) Montrer f injective ssi $\overrightarrow{f}$ injective, f injective ssi $\overleftarrow{f}$ surjective.
    (b) Montrer f surjective ssi $\overrightarrow{f}$ surjective, f surjective ssi $\overleftarrow{f}$ injective.

143. Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$
    (a) Déterminer $f^{-1}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$: f est-elle injective ?
    (b) Déterminer $f\left(\mathbb{R}^3\right)$: f est-elle surjective ?

144. Donner un exemple d'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $f^{-1}((0,0))$ soient égaux tous les deux à la droite d'équation $y = x$; f est-elle surjective? Injective ?

145. On définit f de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$ par $f(a,b) = a + \frac{1}{b}$; étudier l'injectivité et la surjectivité de f.

146. Soit S la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 et f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans S qui à (θ, λ) fait correspondre $(\cos\theta\cos\lambda, \sin\theta\cos\lambda, \sin\lambda)$.
    (a) Vérifier que $f(\theta + \pi, \pi - \lambda) = f(\theta, \lambda)$.
    (b) Montrer que les restrictions de f à $[-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ sont surjectives.
    (c) Déterminer une partie A de $\mathbb{R}^2$ telle que la restriction de f à A soit bijective.

147. Soit f définie de $E =]0, +\infty[^2$ dans lui-même par $f(x,y) = \left((xy)^\alpha, \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\right)$; déterminer α pour que $f \circ f$ soit égal à id_E ; que peut-on dire de f dans ce cas ?

148. Soit f l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par $f(p,q) = 2^p(2q+1)$; montrer que f est bijective.

149. Soit $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$; montrer que f est bijective, préciser l'application réciproque, et tracer les deux courbes.

150. Si f est une application de E vers F, on dit qu'une partie A de E est un domaine d'injectivité de f si la restriction de f à A est injective, et ce domaine est dit maximal si le seul domaine d'injectivité contenant A est A.

 (a) Déterminer un domaine d'injectivité maximal pour $\left\{\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^2 \end{array}\right.$ et pour $\left\{\begin{array}{c} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x^3-x \end{array}\right.$

 (b) Montrer que si A est un domaine d'injectivité, A est maximal ssi $f(A)=f(E)$.

 CORRIGÉ

 Pour $f : x \longrightarrow x^2$, un domaine d'injectivité maximal est $\mathbb{R}_+$; c'est un domaine d'injectivité car f y est strictement croissante et il est maximal car si B inclut strictement $\mathbb{R}_+$, il existe $x<0$ dans B et on a : $f(x)=f(-x)$ avec $x\neq -x$ dans B, donc B n'est plus un domaine d'injectivité.

 $f : x \longrightarrow x^3-x$ est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ (étude de la dérivée) avec $f(-1)=f(1)=0$; donc elle est strictement croissante donc injective sur $A=]-\infty,-1[\,\cup[1,+\infty[$. Comme $f(A)=\mathbb{R}=f(\mathbb{R})$, A est un domaine d'injectivité maximal d'après la propriété que nous allons démontrer juste après.

 Soit donc A un domaine d'injectivité de f, application de E vers F.

 Montrons : $f(A)\neq f(E) \Longrightarrow A$ non maximal.

 Si $f(A)\neq f(E)$ il existe $y=f(x)\in f(E)\setminus f(A)$; alors $x\in E\setminus A$ et f est injective sur $B=A\cup\{x\}$ car elle l'est sur A et $f(x)$ ne peut être l'image d'un élément de A ; A est bien non maximal.

 Montrons : A non maximal$\Longrightarrow f(A)\neq f(E)$.

 Si A est non maximal, il existe B incluant strictement A sur lequel f est injective ; soit $x\in B\setminus A$; f étant injective sur B, $f(x)$ ne peut être aussi l'image d'un élément de A ; donc $f(x)\in f(E)\setminus f(A)$ et $f(A)\neq f(E)$.

 On a donc bien démontré, par double contraposée, A maximal$\Leftrightarrow f(A)=f(E)$.

 SYSTÈMES LINÉAIRES

151. Résoudre et discuter le système de paramètre m : $\left\{\begin{array}{c} x-y+2mz=2m \\ x-my+2z=3-m \\ mx-y+2z=m+1 \end{array}\right.$

 Rep : $m=1$: $x-y+2z=2$; $m=-2$: $x=-1+2z, y=3-2z$; sinon : $x=y=z=1$.

152. Résoudre et discuter le système de paramètres a,b,c : $\left\{\begin{array}{c} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{array}\right.$ On n'étudiera complètement que les cas $(a=b, b\neq c)$ et a,b,c distincts.

153. Résoudre et discuter le système de paramètres a,b,c,d : $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{array}\right.$ On indiquera bien quels sont les cas particuliers, mais on n'étudiera complètement que les cas $(a=b, b\neq c)$ et a,b,c distincts.

 GÉOMÉTRIE

154. Donner un exemple de 4 points qui ne sont pas dans un même plan, et le prouver.

155. L'espace est rapporté à $Oxyz$; soit D une droite qui n'est ni parallèle à la droite Ox, ni parallèle à la droite Oy.Montrer que D est de façon unique l'intersection d'un plan parallèle à la droite Ox et d'un plan parallèle à Oy. Appliquer à D : $\left\{\begin{array}{c} x=3-\alpha \\ y=1+2\alpha \\ z=-2-3\alpha \end{array}\right.$

156. Valeurs de a pour que $A\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ soient coplanaires ?

 Équation du plan dans ce cas ?

157. Déterminer a pour que les droites (AB) et $(A'B')$ soient sécantes , sachant $A\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$; coordonnées du point d'intersection ? Équation du plan les contenant ?

158. Déterminer a pour que les droites $D = (AB)$ avec $A(1,1,1)$ et $B(0,2,3)$ et $D' \left\{ \begin{array}{c} 2x - 3y + 3z = 0 \\ x + y + z = a \end{array} \right.$ soient sécantes ; déterminer alors leur point d'intersection et l'équation cartésienne du plan les contenant.

159. Quelle est l'image de la droite $y = ax$ par la symétrie de base $y = bx$ et de direction $y = cx$?
REP : $y = \dfrac{a(b+c) - 2bc}{2a - (b+c)}x.$
FONCTIONS HYPERBOLIQUES

160. :
   (a) Simplifier sh$x$ ch$x$ ch$2x$ ch$4x$... ch$2^n x$.
   (b) On pose $f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \text{ch}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$; déterminer $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour $x \neq 0$, puis pour $x = 0$.
   (c) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

161. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \text{ch}(kx)$.
Rep : $2^n \text{ch}\, n\dfrac{x}{2} \left(\text{ch}\, \dfrac{x}{2}\right)^n$.
TRIGO RÉCIPROQUE

162. Calculer $\cos(\arctan x)$, $\cos(2\arctan x)$,$\cos(1/2.\arctan x)$ sans faire intervenir de fonction trigonométrique.

163. Montrer, par les angles, puis par les dérivées, que $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour quels x ?) et exprimer de même $\arccos x$.

164. Montrer, par les angles, puis par les dérivées, que $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour quels x ?) ; en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \arctan \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{n} \arcsin \frac{1}{\sqrt{k}}$$

165. $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.
   (a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $f(x+\pi)$.
   (c) Simplifier $f(x)$ pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$et tracer la courbe de f sur $\left[-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

166. :
   (a) Montrer que $\arccos(\cos x) = \left| x - 2\pi.\text{arrondi}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)\right|$ (arrondi(x) est l'entier le plus proche de x)
   (b) Trouver une formule similaire pour $\arctan(\tan x)$.

167. Pour quelles valeurs de a et b de $[0,1]$ a-t-on $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$?

168. On suppose connu que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$; en déduire que
   (a) $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \sin x \leqslant x$ (indication : $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$) et $\forall x \in [0,1]$ $\sqrt{1-x^2} \leqslant \cos x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; en déduire un encadrement de $\tan x$.
   (b) $\forall y \in [0,1[$ $y \leqslant \arcsin y \leqslant \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ et $\forall y \geqslant 0$ $\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant \arctan y \leqslant y$.

169. On pose $f(x) = \sin x + x$; montrer que f possède une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$; tracer les courbes de f et f^{-1};
déterminer l'ensemble de dérivabilité de f; calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

COMPLEXES

170. Soit a un complexe non réel et U l'ensemble des complexes de module 1 ; pour tout complexe différent de a, on pose $f(z) = \dfrac{z-\overline{a}}{z-a}$; montrer que f définit une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et une bijection de $\mathbb{R}$ sur $U\backslash\{1\}$.
Indication : $f^{-1}(z) = \dfrac{az-\overline{a}}{z-1}$

171. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $4z^3 - (10+4i)z^2 + (9+17i)z + 3 - 9i = 0$ sachant qu'elle a une solution imaginaire pure.
Rep : $3i/2, (1+i)/2, 2-i$.

172. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^3 - 4(1-i)z^2 + (2-11i)z - 3 + 15i = 0$ sachant qu'elle a une solution imaginaire pure.
Rep : $-3i, 3-2i, 1+i$.

173. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $2z^4 - (6-7i)z^2 + 4 + 3i = 0$.
Rep : $\pm(1+i)/2, \pm(2-i)$

174. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$.
Rep : $(\pm(1-3i), \pm(3+2i))$

175. Soient u et v deux complexes de module 1 ; construire graphiquement les deux racines carrées de uv.

176. Soient z, z' deux complexes, $z \neq 0$; montrer que

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$$

   (a) par le calcul
   (b) géométriquement

177. Soit u un complexe ; montrer que u est de module 1 ssi $\dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{1}{u}\right)$ est un réel de $[-1,1]$.

178. Montrer que $|u| = |v| = |w| \Rightarrow |u+v+w| = |uv+vw+wu|$.

179. On pose $u_n = (1+i)^n$, A_n le point image de u_n ; indiquer comment on construit géométriquement A_n à partir de A_{n-1} et O; appliquer ceci sur une figure indiquant les premiers points de la suite.
REP : OA_nA_{n+1} est direct isocèle rectangle en A_{n+1}.

180. Soit $x+iy$ un complexe non nul d'argument $\theta \in \left]-\pi,\pi\right]$; montrer que si $x, y > 0$, $\theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$. Donner au moins une formule pour les trois autres cas des signes de x et y.
REP : si $x > 0, y < 0$, $\theta = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$
si $x < 0, y > 0$, $\theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pi + \arctan \frac{y}{x}$

181. On considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui à tout point d'affixe z fait correspondre le point d'affixe z^2.
   (a) Déterminer l'image par f des droites $V_a : x = a$ et $H_a : y = a$. Nature de ces courbes ? Comment obtient-on H_a à partir de V_a?
   (b) Représenter graphiquement $f(V_a)$ et $f(H_a)$ pour $a = -2, -1, 0, 1, 2$.

182. Montrer que pour tous complexes a et b, on a $|a-b|^2 \leqslant \left(1+|a|^2\right)\left(1+|b|^2\right)$. Etudier le cas d'égalité et placer dans le plan les points $A(a)$ et $B(b)$ dans ce cas.

183. Soient (x,y,z) et $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$; montrer que $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=a \\ x+jy+\overline{j}z=b \\ x+\overline{j}y+jz=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} a+b+c=3x \\ a+jb+\overline{j}c=3z \\ a+\overline{j}b+jc=3y \end{array}$

A quelle CNS portant sur (a,b,c) les solutions x,y,z du système $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=a \\ x+jy+\overline{j}z=b \\ x+\overline{j}y+jz=c \end{array}\right.$ sont-elles réelles ?

184. Sooient (x,y,z,t) et $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$; montrer que :

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=a \\ x+iy-z-it=b \\ x-y+z-t=c \\ x-iy-z+it=d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c+d=4x \\ a-ib-c+id=4y \\ a-b+c-d=4z \\ a+ib-c-id=4t \end{array}\right.$$

A quelle CNS portant sur (a,b,c,d) les solutions du système $\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=a \\ x+iy-z-it=b \\ x-y+z-t=c \\ x-iy-z+it=d \end{array}\right.$ sont-elles réelles ?

185. On pose $S_0=\sum\limits_{0\leqslant 3k\leqslant n}\binom{n}{3k}, S_1=\sum\limits_{0\leqslant 3k+1\leqslant n}\binom{n}{3k+1}, S_2=\sum\limits_{0\leqslant 3k+2\leqslant n}\binom{n}{3k+2}$.

Exprimer $(1+1)^n, (1+j)^n, \left(1+\overline{j}\right)^n$ en fonction de S_0,S_1,S_2 ; en déduire la valeur de ces derniers.

rep : $S_q=\dfrac{2^n+2(-1)^n\cos\left((n+q)\dfrac{2\pi}{3}\right)}{3}$ (ou $\dfrac{2^n+2\cos\left((n+2q)\dfrac{\pi}{3}\right)}{3}$)

186. On pose $S_0=\sum\limits_{0\leqslant 4k\leqslant n}\binom{n}{4k}, S_1=\sum\limits_{0\leqslant 4k+1\leqslant n}\binom{n}{4k+1}, S_2=\sum\limits_{0\leqslant 3k+2\leqslant n}\binom{n}{4k+2}, S_3=\sum\limits_{0\leqslant 4k+3\leqslant n}\binom{n}{4k+3}$.

Exprimer $(1+1)^n, (1+i)^n, (1-1)^n, (1-i)^n$ en fonction de S_0,S_1,S_2,S_3 ; en déduire la valeur de ces derniers (on mettra $1+i$ et $1-i$ sous forme trigonométrique).

187. Résoudre dans $\mathbb{C}$ (n étant un entier $\geqslant 1$ fixé) : $z^n\in\mathbb{R}$; tracer l'ensemble des solutions pour $n=2$ puis 3.

188. Soit u une racine cinquième de 1 autre que 1 , $A=u+u^4, B=u^2+u^3$.

Calculer $A+B$ et AB ; en déduire $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

189. Soit u une racine septième de 1 autre que 1 , $A=u+u^2+u^4, B=u^3+u^5+u^6$.
Calculer $A+B$ et AB ; en déduire A et B si $u=e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

190. Soit u une racine septième de 1 ; calculer $\dfrac{u}{1+u^2}+\dfrac{u^2}{1+u^4}+\dfrac{u^3}{1+u^6}$.

Rep : -2 ou $3/2$.

191. Déterminer de deux façons les racines quatrièmes de $\sqrt{3}+i$ et en déduire $\cos\dfrac{\pi}{24},\sin\dfrac{\pi}{24}$.

192. Soit n un entier >0 ;

(a) Résoudre en utilisant les racines $n-$*ièmes* : $(z-i)^n=(z+i)^n$ (on doit trouver $n-1$ réels).

(b) Résoudre *algébriquement* pour $n=5$; en déduire les valeurs de $\tan\dfrac{\pi}{5}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{5}$.

INTÉGRATION

193. Montrer par récurrence que pour n naturel et $x\geqslant 0$,

$\operatorname{ch} x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\operatorname{sh} x\geqslant x+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

194. Montrer par récurrence que pour n naturel et $x\geqslant 0$,

$1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}\leqslant e^x\leqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+...+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^n}{n!}e^x$.

195. Calculer $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}dx$, $a \leqslant b$.
   (a) En montrant que la courbe de la fonction à intégrer est un demi-cercle.
   (b) En faisant un changement de variable correspondant à la paramétrisation par l'angle au centre de ce demi-cercle.

196. Calculer $\int_0^1 x \arcsin x \; dx$
   (a) En commençant par effectuer une intégration par parties (puis Binet).
   (b) En commençant par effectuer le changement de variable : $t = \arcsin x$.
   (c) Représenter l'aire calculée.

197. Calculer $\int_1^{\sqrt{2}} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
   (a) En posant $u = 1/x$
   (b) En posant $u = \sqrt{x^2-1}$
   (c) En posant $u = x + \sqrt{x^2-1}$
   (d) facultatif : En posant $t = \text{argch } x$.

198. Calculer $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
   (a) En posant $u = 1/x$
   (b) En posant $u = \sqrt{x^2+1}$
   (c) En posant $u = x + \sqrt{x^2+1}$
   (d) facultatif : en posant $t = \text{argsh } x$.

199. Calculer $\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$
   (a) En posant $u = 1/x$
   (b) En posant $u = \sqrt{1-x^2}$
   (c) En posant $u = \arcsin x$

200. Calculer $\int_0^1 \dfrac{dx}{\text{ch } x}$
   (a) En posant $u =$sh x
   (b) En posant $u = e^x$
   (c) En posant $u =\text{th}\dfrac{x}{2}$
   Vérifier l'égalité des valeurs trouvées.

201. On pose $E(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{x} dx$; calculer à l'aide de $E(x)$ les primitives suivantes :
   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{xe^x}$
   (b) $\displaystyle\int e^x \ln x dx$
   (c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{x^2} dx$
   (d) $\displaystyle\int e^{\frac{1}{x}} dx$
   (e) $\displaystyle\int \frac{e^{x^2}}{x} dx$

(f) $\int e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$

202. On pose $I_n = \displaystyle\int \cos^n x dx$; montrer par IPP que $nI_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$; en déduire I_2, I_3, I_4.

203. Calculer $\int_0^\pi \dfrac{dx}{1+\sin x}$, puis $\int_0^\pi \dfrac{xdx}{1+\sin x}$.
Rep : 2 et π.

204. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$; ensemble de définition, signe, prolongements en 0 et 1, dérivée, variations, limites, tracé.

205. Soit f une fonction continue croissante sur $\mathbb{R}_+$; on pose, pour $x>0$, $M(x)$ =valeur moyenne de f sur $[0,x]$; montrer que M est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

206. Soit f une fonction dérivable injective de dérivée jamais nulle sur un intervalle I et f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $J = f(I)$, F une primitive de f; montrer qu'une primitive de f^{-1} est la fonction G définie par $xf^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right)$. Appliquer au calcul de primitives de ln, d'arcsin et d' arctan et comparer avec leur calcul habituel.
RELATIONS

207. On définit dans l'ensemble des fonctions réelles définies sur $[0,+\infty[$ les relations R et S :
$$f\ R\ g \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists A>0\ \ \forall x>A\quad |f(x)-g(x)|<\varepsilon$$
et
$$f\ S\ g \Leftrightarrow\ \exists A>0\quad \forall\varepsilon>0\quad \forall x>A\quad |f(x)-g(x)|<\varepsilon$$
   (a) Vérifier que R est réflexive, symétrique et transitive (on admettra que S aussi).
   (b) Quelle relation implique l'autre ? Donner un exemple de couple (f,g) vérifiant l'une et pas l'autre.

208. On dit qu'une relation R dans un ensemble E est *strictement antisymétrique* si $\forall x,y\in E\ \ xRy \Longrightarrow y \not{R} x$.
   (a) Donner un exemple.
   (b) Une relation strictement antisymétrique est-elle antisymétrique ?
   (c) Trouver une condition du type : R est strictement antisymétrique ssi R est antisymétrique et ....

209. Une relation antisymétrique est dite maximale si on ne peut pas rajouter de couple dans son graphe sans perdre sa propriété d'antisymétrie ; par exemple, la relation de table

$\nearrow$	a	b	c
a	$\times$	$\times$	
b		$\times$	$\times$
c	$\times$		$\times$

est antisymétrique maximale, tandis que la relation de table

$\nearrow$	a	b	c
a	$\times$		
b			$\times$
c	$\times$		$\times$

est antisymétrique non maximale.
Combien de couples une relation antisymétrique maximale sur un ensemble à n éléments possède-t-elle dans son graphe ?
Combien existe-t-il de relations antisymétriques maximales dans un ensemble à n éléments ?
RELATIONS D'ORDRE

210. L'ensemble des nombres entiers naturels est muni de la relation de divisibilité ; déterminer l'ensemble des majorants (pour cette relation) de l'ensemble $A = \{1,2,3,4,6,12\}$, puis l'ensemble des majorants de l'ensemble $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

211. Déterminer toutes les relations d'ordre sur un ensemble à 3 éléments. Indiquer celles qui sont totales.

212. On définit dans $\mathbb{R}$ la relation R par $uRv \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ v = u^{2^n}$;

   (a) R est-elle une relation d'ordre ?

   (b) Même question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

213. On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation : $(x,y)\,R\,(x',y') \Leftrightarrow (x > x' \Longrightarrow y \leqslant y')$.

   Est-ce une relation d'ordre ?

214. On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation d'ordre lexicographique : $(x,y) \leqslant (x',y') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x < x' \\ \text{ou } x = x' \text{ et } y \leqslant y' \end{array} \right.$.

   (a) Est-elle totale ?

   (b) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}^2$ possède-t-elle une borne supérieure ?

215. On définit dans l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ la relation $\leqslant$ par

$$f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant g(x)$$

   (a) Vérifier que $\leqslant$ est bien une relation d'ordre. Est-elle totale ?

   (b) Soient f et g appartenant à $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; à quelle condition $A = \{f,g\}$ possède-telle un maximum ? A possède-t-elle toujours une borne supérieure ?

   (c) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ possède-t-elle une borne supérieure ?

   (d) Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}_X = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \ f(\mathbb{R}) \subset X \right\}$; montrer que $\mathcal{F}_X$ possède un maximum dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ssi X en possède un dans $\mathbb{R}$.

216. On définit dans l'ensemble des parties non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ la relation R par :

$$A \ \ R \ \ B \Leftrightarrow \forall x \in A \ \ \forall y \in B \quad x \leqslant y$$

   (a) Etudier la réflexivité, la transitivité, et l'antisymétrie de R. Est-ce une relation d'ordre ?

   (b) On définit maintenant, toujours dans l'ensemble des parties non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ la relation S par :

$$A \ \ S \ \ B \Leftrightarrow A \ R \ B \text{ ou } A = B$$

   On admettra que S est bien une relation d'ordre : est-elle totale ?

   (c) Vérifier que $\mathcal{P}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) \setminus \{\varnothing\}$ possède un plus petit élément et un plus grand élément pour S.

217. Théorème du point fixe pour une fonction croissante

   (a) Soit f une fonction croissante de [0,1] dans lui-même ; montrer qu'elle possède un point fixe (cad qu'il existe un α de [0,1] tel que $f(\alpha) = \alpha$).

   Indication : considérer l'ensemble $A = \{x \in [0,1] \ / \ f(x) \leqslant x\}$; montrer qu'il n'est pas vide et considérer sa borne inférieure α ; vérifier que $\alpha \in [0,1]$ et montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

   (b) Montrer que ce théorème est faux si l'on remplace [0,1] par]0,1].

218. Déterminer $\inf\limits_{a,b>0} \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sup\limits_{a,b>0} \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

OPÉRATIONS

219. Soit $*$ une loi associative dans E telle que pour tous x,y,z de E, $x*x = x$ et $x*y*z = y*z*x$.

   Montrer que $*$ est commutative.

   Rep : $xy = xxy = yxx = yx$.

220. On définit dans $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $x * y = a(x+y) + xy$.

    (a) A quelle condition sur a est-elle associative ?

    (b) Etudier alors ses autres propriétés.

221. Soit E un ensemble fini, et A l'ensemble des applications de E dans E non bijectives ; montrer que A est une partie stable de E^E pour la loi $\circ$ (ce qui fournit donc un exemple de loi associative sans élément neutre et non commutative) ; vérifier que cette propriété est fausse si $E = \mathbb{R}$.

222. Etudier les propriétés de la loi $*$ définie dans $\mathbb{R}$ par $x * y =$arrondi$(x+y)$. Que dire de la restriction de $*$ à $\mathbb{Z}$?
    Idem pour $x *' y =$ arrondi$(x) +$ arrondi(y) .

223. Etudier les propriétés de la loi $*$ définie dans $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) * (x',y') = (x+y', y+x')$.

224. Etudier les propriétés de la loi $*$ définie dans $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) * (x',y') = (xx' + yy', xy' + yx')$.

225. Etudier la distributivité de l'intersection sur la différence ensembliste dans $\mathcal{P}(E)$.

226. On considère un ensemble E muni de 2 opérations $\wedge$ et $\vee$ vérifiant :
    1) $\vee$ est commutative, associative, distributive par rapport à $\wedge$, possède un neutre noté 0 et un absorbant noté 1, et tout élément est idempotent ($x \vee x = x$) 2) Il existe une application $\left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto \overline{x} \end{array} \right.$ vérifiant $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{0} = 1, \overline{\overline{x}} = x, x \vee \overline{x} = 1$.Vérifier que $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. Montrer que $\wedge$ est commutative, associative, distributive par rapport à $\vee$, possède un neutre 1 et un absorbant 0, et tout élément est idempotent. Montrer que $x \wedge (x \vee y) = x$ (indication : $x \vee 0 = x$), et que $x \vee (x \wedge y) = x$. On définit $x \leqslant y$ par $x \wedge y = x$; vérifier que cela équivaut à $x \vee y = y$. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre et que quel que soit x, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Montrer que $\inf(a,b) = a \wedge b, \sup(a,b) = a \vee b$. Donner deux exemples.

227. Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ stable pour l'addition, qui contient des éléments > 0 et des éléments < 0 , mais qui n'est pas un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
    REP : $\mathbb{N} - \sqrt{2}\mathbb{N}$, $\ln\left(\mathbb{D}_+^*\right)$ par exemple.

228. On définit dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la loi $*$ par $a * b = \arctan\left(\dfrac{\sin a + \sin b}{\cos a \cos b}\right)$

    (a) Montrer que $\cos(a * b) = \dfrac{\cos a \cos b}{1 + \sin a \sin b}$ et calculer $\sin(a * b)$.

    (b) Montrer que $\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, *\right)$ est un groupe.

229. :

    (a) Soit $*$ une loi associative dans E ayant un élément neutre e ; montrer que si deux éléments symétrisables commutent, alors leurs symétriques commutent.

    (b) Soit G un groupe multiplicatif, H et K deux sous-groupes de G tels que $hk = kh$ pour tous (h,k) de $H \times K$; montrer que $HK = \{hk \ / \ h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe de G.

230. Soit $A = \left\{x + jy \quad / \quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

    (a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

    (b) Montrer que $\forall z \in A \quad |z|^2 \in \mathbb{N}$

    (c) Montrer qu'un élément de A est inversible ss'il est de module 1. En déduire l'ensemble G des inversibles de A. En donner la table et la structure.

231. Soit $A = \left\{x + y\ \sqrt[3]{2} \ / \quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \mathbb{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Z}$.

    (a) Montrer que $\sqrt[3]{4} \notin A$.

    (b) Montrer que A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ mais pas un sous-anneau.

232. Montrer que si dans un anneau intègre A un élément a possède un inverse à droite b, alors b est aussi inverse à gauche de a.

233. On définit dans $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $x * y = x + y + xy$.

   (a) Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, \times)$ par un isomorphisme du type $f(x) = x + a$; en déduire les propriétés de $*$.

   (b) Calculer $1 * 2 * ... * n$.

ARITHMÉTIQUE

234. Montrer qu'une partie de $\mathbb{N}$ stable pour l'addition et contenant 0 n'est pas forcément de la forme $a\mathbb{N}$.

   REP : $2\mathbb{N} + 3\mathbb{N}$ a pour plus petit élément > 0 2, mais 4 n'y appartient pas.

235. Soit (u_n) une suite périodique. Soit m_0 sa plus petite période > 0 ; montrer que toute période de (u_n) est un multiple de m_0.

   Indication : utiliser le théorème des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

236. On divise deux entiers $a > b$ par leur différence $a - b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

   $a = (a-b)\,q + r, b = (b-a)\,q' + r'$, comme $a \equiv b \equiv r \equiv r' \mod (a-b)$, $\boxed{r = r'}$; donc $a - (a-b)\,q = b - (a-b)\,q'$, *d'où* $\boxed{q - q' = 1}$.

237. Comment remarque t-on qu'un nombre écrit dans une base impaire est pair ?

   REP : le nombre de chiffres impairs est pair.

238. Montrer de 2 manières différentes que lorsqu'on retranche 1 à un carré impair, on obtient un multiple de 8.

   Indication : Soit $(2k+1)^2 = 4k(k+1)$, soit $a^2 \equiv 1 \mod 8$ si a impair.

239. Montrer que pour $n \geqslant 2$, le dernier chiffre (en base 10) d'un nombre de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ est toujours un 7.

   Indication : $2^{2^n} = \left(2^4\right)^{2^{n-2}} \equiv 6^{2^{n-2}} \equiv 6 \mod 10$.

240. Montrer que si a et b sont des entiers non multiples de 5, alors un, et un seul, des nombres $a^2 + b^2$ et $a^2 - b^2$ est multiple de 5.

   Indication : $a^2 \equiv \pm 1 \mod 5$.

241. :

   (a) Montrer que si une somme de deux carrés non nuls $N = a^2 + b^2$ est un multiple de 4, alors $N/4$ est aussi une somme de deux carrés non nuls.

   (b) En déduire qu'une puissance de 4 n'est jamais la somme de deux carrés non nuls.

   (c) Montrer que le double d'une puissance de 4 est d'une et d'une seule façon la somme de deux carrés non nuls.

242. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ($u_n = F_{n+2}$).

   (a) On exécute l'algorithme d'Euclide sur le couple d'entiers (u_n, u_{n-1}) ; combien de divisions euclidiennes a-t-on effectuées ?

   (b) On exécute l'algorithme d'Euclide sur le couple d'entiers (a, b) , $a > b > 0$, et on constate qu'on a dû effectuer n divisions euclidiennes. Montrer que $a \geqslant u_n$ et $b \geqslant u_{n-1}$.

   (c) Vérifier que $u_n \geqslant \varphi^n$ où φ est le nombre d'or $\left(\varphi^2 = \varphi + 1\right)$ et en déduire que si b possède k chiffres en base 10, l'algorithme d'Euclide donne le pgcd en $5k + 1$ coups au plus quel que soit a.

243. Montrer que si a et b sont deux entiers, $a^4 + 4b^4$ n'est jamais premier, sauf si $a^4 = b^4 = 1$.

   Indication : $a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2 = ...$

244. Montrer que si $p = 3$ ou 7 et a et b sont des entiers, $a^2 + b^2$ multiple de p implique a et b multiples de p (on peut montrer que cette propriété est même vraie pour tout premier p non congru à 1 modulo 4).

245. Soit p un nombre premier impair. On dit qu'un entier r entre 0 et $p-1$ est une racine $n-$ ième d'un entier a modulo p si $r^n \equiv a \quad [p]$.

(a) Montrer que que tout entier non multiple de p possède un inverse modulo p et que si deux entiers a et b ont un produit congru à 0 modulo p, l'un d'entre eux est congru à 0 modulo p.

(b) Déterminer les racines carrées de 1 modulo p.

(c) Donner un exemple de $p > 3$ tel que -3 possède une racine carrée, et un exemple où il n'en possède pas.

On se propose dans la suite de déterminer les racines cubiques de 1.

(d) Résoudre $x^2 + x + 1 \equiv 0 \ \ [p]$ (indication : multiplier par 4 et mettre sous forme canonique).

(e) En déduire que si -3 possède une racine carrée a modulo p alors 1 possède 3 racines cubiques modulo p, (on les exprimera en fonction de a d'un inverse b de 2) et que sinon, il n'en possède qu'une. Déterminer par exemple les racines cubiques de 1 modulo 5 et 7.

REP:

a) : Bezout, puis Gauss.

b) $x^2 \equiv 1 \ [p] \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 1 \ [p] \Leftrightarrow x \equiv \pm 1 \ \ [p]$.

c) $p = 5$: -3 n'a pas de racine carrée ; $p = 7$: $5^2 = 28 - 3 \equiv -3 \ \ [7]$.

d) p impair, donc $x^2 + x + 1 \equiv 0 \ \ [p] \Longleftrightarrow 4\left(x^2 + x + 1\right) \equiv 0 \ \ [p] \Longleftrightarrow (2x+1)^2 \equiv -3 \ \ [p]$.

e) modulo 5 1 n'a que 1 comme racine cubique, mais modulo 7, $x^3 = 1 \Longleftrightarrow x \equiv 1$ ou $2x + 1 \equiv \pm 5 \Longleftrightarrow x \equiv 1$ ou $2x \equiv 4$ ou -6 ; les racines cubiques de 1 modulo 7 sont 1,2 et 4.

246. :

(a) Déterminer un entier u tel que $4u$ est congru à 1 modulo 7.

(b) On se propose de résoudre en nombres entiers l'équation $7x + 4y = 100$.

i. Montrer que si (x, y) est solution, y est forcément congru à 4 modulo 7.

ii. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation et, parmi celles-ci, celles qui sont formées de nombres > 0.

(c) Dans un champ, il y a en tout 100 poules, vaches et cochons, avec plus de vaches que de cochons. Une vache mange à elle seule 5 tartes ; un cochon en mange 3, et trois poules en mangent 1. A eux tous, ils mangent 100 tartes. Combien y a-t-il de poules, de vaches, et de cochons?

247. Le petit théorème de Fermat pour les premiers jumeaux (on suppose connu le petit théorème de Fermat habituel : si p est premier et a non multiple de p alors $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$).

Montrer que si p et $q = p + 2$ sont des nombres premiers jumeaux, alors $2^q \equiv 3q + 2 \bmod (pq)$.

248. On suppose connu le petit théorème de Fermat : si p est premier et a non multiple de p alors $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. Cependant, la réciproque est fausse. On dira donc qu'un entier n est *pseudo-premier* en base a si n n'est pas premier mais $a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$.

Soit alors a un entier $\geqslant 2$, p un nombre premier ne divisant pas $a\left(a^2 - 1\right)$, et considérons $n = \dfrac{a^{2p} - 1}{a^2 - 1}$.

(a) Montrer que n est un entier non premier impair.

(b) Vérifier que $a^{2p} \equiv 1 \bmod n$.

(c) Montrer que p divise $n - 1$ (utiliser le théorème de Fermat).

(d) En déduire que n est pseudo-premier en base a.

(e) En déduire qu'il y a une infinité de pseudo-premiers en base a.

(f) Trouver un pseudo premier en base 2.

249. Soient k, n deux entiers, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$; donner une condition suffisante pour que

(a) $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ soit divisible par n.

(b) $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ soit divisible par $n(n-1)/2$.

(c) Montrer que le cas b) est obtenu si n et $(n-1)/2$ sont premiers, et $5 \leqslant k \leqslant \dfrac{n-3}{2}$ (dans ce cas, n est appelé un nombre premier "sûr").

250. Montrer que si p est premier, alors $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \equiv 0\ [p]$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$; en déduire les restes dans la division par p de $\begin{pmatrix} p-1 \\ k \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} p+1 \\ k \end{pmatrix}$.

251. Montrer que si un entier > 0 est à la fois un carré et un cube alors c'est une puissance sixième. Généraliser à une puissance n-ième et une puissance m-ième.

252. Le maximum de 2 réels est noté $a \vee b$ et le minimum $a \wedge b$;

(a) En utilisant le fait que $a \vee b = a + b - a \wedge b$, donner une formule exprimant $a \vee b \vee c$ uniquement à l'aide de $+$ et $\wedge$.

(b) Montrer que pour a, b, c entiers > 0, $\text{ppcm}(a,b,c) = \dfrac{abc.\text{pgcd}\,(a,b,c)}{\text{pgcd}\,(a,b)\,\text{pgcd}\,(b,c)\,\text{pgcd}\,(c,a)}$. Vérifier par exemple pour le ppcm de 6, 10 et 15.

253. Soit (p_n) la suite croissante des nombres premiers.

(a) Montrer que $p_{n+1} \leqslant p_1....p_n + 1$.

(b) Montrer que tout entier $\geqslant 7$ est la somme de 2 nombres premiers entre eux $\geqslant 2$.

(c) En déduire que pour $n \geqslant 3$, $p_{n+1} + p_{n+2} \leqslant p_1....p_n$ (appliquer b) à $p_1....p_n$).
SUITES

254. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = 3^n + (-2)^n$.

255. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{4^n}$ et de la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$; en déduire un encadrement de $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

256. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante ;

(a) montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $k \in [|1, n|]$

$$n \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) \leqslant k \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)$$

Indication : étudier $u_n = k \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right) - n \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \right)$.

(b) En déduire que si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante à termes strictement positifs alors pour tout $n \geqslant 1$ et tout $k \in [|1, n|]$

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right)^n \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^k$$

257. On pose $u_n = \sqrt{n} \dfrac{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}{4^n}$ $(n \geqslant 1)$

(a) Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$, en déduire le sens de variation de (u_n).

(b) Montrer que $u_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$, en déduire que (u_n) est majorée, et que $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \leqslant \dfrac{4^n}{\sqrt{2n}}$.

258. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{kn}$.

259. On pose $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

(a) Montrer que $r_n \leqslant \sqrt{n} + \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

(b) En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{r_n}{\sqrt{n}}$ est croissante et majorée.

260. On dit qu'une suite est "périodique APCR" s'il existe un rang à partir duquel elle est périodique. Donner un exemple de suite prenant un nombre fini de valeurs et qui n'est pas périodique APCR. Montrer que ce dernier phénomène ne peut pas se produire si la suite est définie par récurrence simple ($u_{n+1} = f(u_n)$).

REP : $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est un carré} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ n'est pas périodique $APCR$.

Si u_n vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ prend un nombre fini de valeurs, elle prend forcémént deux fois une valeur identique , soit $u_p = u_q$ avec $p < q$; mezalors (u_n) est $q-p$-périodique à partir du rang p.

261. Soit (u_n) une suite numérique ; on pose $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n - au_{n-1}$; exprimer u_n en fonction des termes de la suite (v_n). Idem pour $w_n = u_n - nu_{n-1}$.

262. Soit u_n le nombre qui s'écrit 123...n en base $n+1$; exprimer u_n sous forme d'une somme et calculer cette somme à l'aide des suites géométriques.

REP : $\frac{(n+1)^{n+1} - n^2 - n - 1}{n^2}$.

263. $1 = 1^3, 3+5 = 2^3, 7+9+11 = 3^3$; écrire la formule générale et la démontrer.

264. Arthur place S à un taux mensuel de 1% ; chaque mois est prélevé sur la somme placée 1 de frais fixes. Quelle somme aura-t-il au bout d'un an ? A partir de quelle somme ce placement est-il avantageux ?

265. Si $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$, on définit une suite de fonctions par récurrence en posant : $f_0(x) = f(x)$ et $f_{p+1}(x) = xf_p'(x)$.

(a) Donner et démontrer une formule développée pour $f_p(x)$.

(b) En déduire par cette méthode $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$.

266. Calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

(a) Par une méthode utilisant les dérivées.

(b) Par une méthode n'utilisant pas les dérivées.

267. :

(a) Calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^k$; en déduire, pour $|x| < 1$, la valeur de $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^k$.

(b) Calculer $f(1/100)$ et en déduire les 200 premières décimales de $1/9801$.

268. :

(a) Calculer $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$; on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

(b) Montrer que $u_n = 1 + \frac{n+1}{2n} u_{n-1}$.

(c) En déduire $u_n \geqslant 2 + \frac{1}{2^n}$.

269. Achille parcourt l'axe des x à la vitesse V et une tortue à la vitesse $v = V/k$; leurs positions à l'instant t sont données par $X = Vt$ et $x = a + vt$ ($a > 0$).

On pose $X_0 = 0$ et $x_0 = a$, positions d'Achille et de la tortue à l'instant 0 , et on définit deux suites (X_n) et (x_n) , de sorte que X_n et x_n soient les positions respectives d'Achille et de la tortue au même instant t_n et que x_{n+1} soit la position de la tortue au moment (t_{n+1}) où Achille atteint la position x_n que la tortue avait à l'instant t_n (donc $X_{n+1} = x_n$).

On demande de calculer x_n en fonction de n, k, a.

REP : $a\dfrac{k}{k-1}\left(1-\left(\dfrac{1}{k}\right)^{n+1}\right)$; écrire ce nombre en base 10 pour $a = 1$ et $k = 10$.

270. Soient a, b, c, d 4 termes consécutifs d'une suite de type Fibonacci ($u_{n+2} = u_{n+1} + u_{n+1}$) ; montrer que $A = ad$, $B = 2bc, C = b^2 + c^2$ forment un triplet pythagoricien ($A^2 + B^2 = C^2$).

271. Déterminer u_n en fonction de n sachant que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$ et $u_0 = 2, u_2 = 13$.

272. Déterminer u_n en fonction de n sachant que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$ et $u_0 + u_1 = 1; 10u_0 + u_3 = 1$.

273. On définit les suites de Fibonacci (F_n) et de Lucas (L_n) par la même relation de récurrence : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ et par les conditions initiales : $F_0 = 0, F_1 = 1, L_0 = 2, L_1 = 1$.

   (a) Exprimer F_n et L_n en fonction de n en utilisant les deux solutions φ et ψ de l'équation caractéristique.

   (b) Montrer que pour $p \geqslant q \quad F_{p+q} + (-1)^q F_{p-q} = F_p L_q$.

   REP a) $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}, L_n = \varphi^n + \psi^n$.

   REP b) Récurrence délicate ; utiliser les formules.

274. Calcul d'une suite par un accumulateur.

On définit par récurrence une fonction U de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $U(0, x) = x$ et $U(n, x) = U(n-1, nx)$; que vaut $U(n, 1)$?

275. Calcul d'une suite récurrente double par un accumulateur.

Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ étant donnée, on définit une fonction U de $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $U(0, a, b) = a$, $U(1, a, b) = b$ et $U(n, a, b) = U(n-1, b, f(a, b))$; montrer que pour a et b donnés, la suite (u_n) définie par $u_0 = a, u_1 = b, u_n = f(u_{n-2}, u_{n-1})$ vérifie $u_n = U(n, a, b)$ (l'accumulateur est le couple (a, b), qui "accumule" les résulats successifs de la suite)

276. Calculer le terme général de la suite (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = \cos x, u_n = 2\cos x.u_{n-1} - u_{n-2}$. Que retrouve-t-on ? Idem pour $u_0 = 0, u_1 = \sin x, u_n = 2\cos x.u_{n-1} - u_{n-2}$.

277. Soit (u_n) une suite récurrente double vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$; montrer que la suite $(v_n) = (u_{2n})$ est aussi une suite récurrente double et que l'équation caractéristique associée à (v_n) a pour solutions les carrés des solutions de celle associée à (u_n) .

278. Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. On demande de calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{F_n}{10^{n-1}}$(on vérifiera que c'est un rationnel) et de donner ses 5 premières décimales sans calculatrice.

REP : 100/89=1,1235....

279. Soit $t \in]0, 1[$ et (u_n) une suite définie par ses deux premiers termes et la relation $u_n = moyenne\begin{pmatrix} u_{n-1} & u_{n-2} \\ t & 1-t \end{pmatrix}$; calculer u_n et exprimer sa limite comme moyenne de u_0 et u_1.

280. On donne $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_0 u_1 ..u_n + 2 \end{cases}$; calculer u_n en fonction de n.

281. $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

(a) Déterminer une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}; en déduire u_n.
(b) Déterminer $\lim u_n$ à l'aide d'un encadrement.
(c) En déduire $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}$.

282. $u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

(a) Simplifier u_n; en déduire sa limite.
(b) En déduire la convergence de $(q_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$.

283. :

(a) Une personne décide de manger 1/10 d'une plaque de chocolat, le lendemain 1/10 du restant et ainsi de suite. Au bout de combien de temps aura-t-elle mangé la moitié ? Quelle fraction aura-t-elle mangé à l'infini ?
(b) Une personne décide de manger 1/4 d'une plaque de chocolat, le lendemain 1/9 du restant, le surlendemain 1/16 et ainsi de suite. Quelle fraction aura-t-elle mangé à l'infini ?

284. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leqslant a$ et $v_n \leqslant b$ pour tout n et $u_n + v_n \to a + b$. Que dire de (u_n) et (v_n) ? Est-ce encore exact si on suppose $u_n \leqslant a$ et $v_n \geqslant b$ pour tout n ?

285. :

(a) Donner un exemple de suite réelle bornée n'ayant ni plus petite valeur, ni plus grande valeur.
(b) Soit (u_n) une suite réelle convergente. Montrer qu'elle possède une plus petite valeur, ou une plus grande valeur. On utilisera le fait que tout ensemble fini non vide de réels possède un plus grand et un plus petit élément.

286. Que dire d'une suite monotone ayant une sous-suite convergente?

287. Césaro sans epsilon, mais dans le cas monotone seulement.

Soit (u_n) une suite croissante $v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}$

(a) Montrer que (v_n) est croissante, et que $v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2}$.
(b) En déduire que si (u_n) est convergente, (v_n) également, de même limite.
(c) En déduire que si (v_n) est convergente, (u_n) également, de même limite.
(d) En déduire que $u_n \to +\infty$ ssi $v_n \to +\infty$.

288. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_n \leqslant l$ et $l - u_{n+1} \leqslant u_{n+1} - u_n$ pour un certain réel l et tout entier naturel n.

(a) Montrer que la suite (u_n) converge vers l.
(b) Déterminer les suites de la forme $(a\lambda^n + b)$, $a \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, vérifiant la propriété ci-dessus.
(c) Soit f une fonction réelle défnie sur un intervalle I et la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_n = f(u_{n-1})$; déterminer les propriétés vérifiées par f pour être sûr que la suite (u_n) soit bien définie et possède la propriété du départ de l'exercice.
Faire une figure.
(d) Ecrire alors un algorithme python déterminant l à une précision donnée utilisant f .

289. Un escargot capable de parcourir 1 mètre par jour est situé (jour 1) à l'extrémité d'un ruban de longueur 10 mètres. Il voudrait parvenir à l'autre extrémité, mais chaque nuit lorsqu'il se repose, le ruban s'étire uniformément et s'allonge de 10 mètres.

Cet escargot, ou l'un de ses descendants a-t-il des chances de parvenir à ses fins ?

Indication : montrer que la distance u_n qu'il lui reste à parcourir à la fin du jour n vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(u_n - 1)$, calculer u_n et conclure en utilisant un résultat démontré dans le cours.

290. Nombre moyen de diviseurs.

On pose D_n la moyenne arithmétique du nombre de diviseurs des entiers entre 1 et n.

(a) Montrer que nD_n est le nombre de couples de naturels (d, d') vérifiant $dd' \leqslant n$.

(b) En déduire que $D_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{d=1}^{n}\left[\dfrac{n}{d}\right]$.

(c) Redémontrer que $\ln n \leqslant h_n \leqslant \ln n + 1$ où h_n est la série harmonique.

(d) En déduire que $\ln n - 1 \leqslant D_n \leqslant \ln n + 1$.

291. Suites convexes.

On dit qu'une suite (u_n) est *convexe* si chaque terme est au-dessous de la moyenne des deux plus proches ($u_n \leqslant \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$).

(a) Illustrer la propriété avec un diagramme en batons.

(b) Vérifier (u_n) est *convexe ssi* $(u_{n+1} - u_n)$ croissante.

(c) Montrer que si (u_n) est convexe alors pour tout p fixé, $\left(\dfrac{u_n - u_p}{n - p}\right)_{n \geqslant p+1}$ est croissante.

(d) Montrer qu'une suite convexe bornée est décroissante convergente (donner un exemple non constant).

(e) Montrer que si (u_n) est convexe, alors $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ possède toujours une limite, finie ou infinie (donner un exemple de chacun des cas).

292. Soit (u_n) une suite de réels > 0 de limite nulle ; montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{u_k}{2^k}$ ne tend pas vers 0, mais que $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{u_{n-k}}{2^k}$ tend vers 0.

293. On pose pour $n \geqslant 1$: $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{...... + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$.

(a) Montrer que $u_n \leqslant \sqrt{2n+1}$.

(b) Vérifier que pour $n \geqslant 2$ $\quad \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}$ et en déduire $\lim \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$.

(c) Vérifier que pour $n \geqslant 2$ $\quad u_n - \sqrt{n} = \dfrac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$ et en déduire $\lim (u_n - \sqrt{n})$.

(d) Calculer à la machine $u_{100} - \sqrt{100}$.

294. $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right), v_n = u_n + \dfrac{u_n}{n}$; montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

295. $q_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$; déterminer la plus petite valeur de a de sorte que $(u_n) = \left(q_n + \dfrac{a}{n}\right)$ soit décroissante ; en déduire la convergence de (q_n) et un calcul de sa limite à 10^{-3} près (généralisation facultative : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}, v_n = u_n + \dfrac{a}{n^{\alpha-1}}$ avec $\alpha > 1$)

296. $q_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$; montrer que $\left(q_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\left(q_n + \dfrac{1}{n}\right)$ sont adjacentes. En déduire que pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

297. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k.k!}, v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2 n!}$; montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes (on peut montrer que la limite est $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^x - 1}{x}dx$).

298. On donne la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 2}$.

(a) Faire une figure.

(b) Montrer que $f \circ f([0,1]) = [0,1]$.

(c) On donne $f(f(x)) - x = -\dfrac{(x-1)(x-2)\left(x^3+2x-6\right)}{\left(x^2+2\right)^2+18}$; déterminer le comportement de (u_{2n}).

(d) En déduire celui de (u_{2n+1}).

299. Soit (u_n) une suite décroissante de réels > 0 telle que la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ possède une limite finie S.

(a) Donner un exemple.

(b) Montrer que forcément $u_n << \dfrac{1}{n}$ (indication : minorer $S_{2n} - S_n$)

(c) $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$; exprimer T_n en fonction de S_n et u_n et déterminer sa limite.

300. Soit $\delta(n)$ le plus grand diviseur impair de n et $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\delta(k)}{k}$.

(a) Montrer que si n est impair, $S(n) = S(n-1) + 1$ et que sinon, $S(n) = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} S\left(\dfrac{n}{2}\right)$; calculer par exemple $S(100)$.

(b) Calculer $S(2^n)$.
Rep : $\dfrac{2}{3}\left(2^n + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

(c) Montrer que $S(n) = \dfrac{2}{3}n + O(1)$. Interpréter.
Rep : $\dfrac{2}{3}n < S(n) < \dfrac{2}{3}(n+1)$

301. Déterminer un équivalent simple quand n tend vers + l'infini de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1}$.

302. Déterminer un équivalent simple quand n tend vers + l'infini de $u_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k$ et de $v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k^2}$.

303. Soit (u_n) une suite telle que $u_n + u_{n+1} \sim a_n$; montrer que si (u_n) est monotone et $a_n \sim a_{n+1}$, alors $u_n \sim \dfrac{a_n}{2}$, mais que ceci est faux si l'une de ces deux hypothèses n'est pas vérifiée.

304. On pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{k}{k^2-1}$; montrer à l'aide d'une décomposition en éléments simples que $u_n = h_n - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ((h_n) est la série harmonique).

305. Montrer que $n! << n^n$ mais que $\ln(n!) \sim \ln(n^n)$ (à l'aide d'une intégrale).

306. Montrer à l'aide des intégrales, que $n(\ln n - 1) + 1 \leqslant \ln n! \leqslant n(\ln n - 1) + 1 + \dfrac{1}{n}$. En déduire que $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{e}$.

DÉNOMBREMENTS

307. Dénombrer les grilles de mots croisés $n \times n$ ayant exactement une case noire dans chaque ligne et dans chaque colonne.

308. Dénombrer les couples (A, B) formés de parties d'un ensemble E ayant n éléments dont l'intersection est réduite à un élément.

309. Dénombrer les p-uplets $(A_1, A_2, .., A_p)$ formés de parties de E ayant n éléments vérifiant $A_1 \subset A_2 \subset .. \subset A_p$.
REP : $(p+1)^n$.

310. Calculer $\displaystyle\sum_{X\subset[|1,n|]}\left(\sum_{k\in X}k\right)$

Indication : échanger les deux $\sum$.

REP : $n\,(n+1)\,2^{n-2}$.

311. Soit f une application de E dans E; montrer que f vérifie $f^2\,(=f\circ f)=f$ si et seulement si la restriction de f à $f\,(E)$ est l'identité de $f\,(E)$.

En déduire, dans le cas où E est fini possédant n éléments, un calcul du nombre d'application f de E dans E vérifiant $f^2=f$.

312. Déterminer le nombre u_n de parties de $[|1,n|]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. On rappelle que la suite de Fibonacci (F_n) est définie par $F_0=0, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

313. Combien y a t il de types de classements avec ex æquos possibles de n concurrents?

Par exemple, pour $n=3$ il y en a 4 : soit il n'y a pas d'ex æquos, soit il y a un premier et deux seconds ex æquos, soit il y a deux premiers ex æquos et un troisième, soit enfin trois premiers (et derniers !) ex æquos.

314. Combien y a t il de façons de classer 4 personnes avec des ex aequos possibles ?

Réponse : $24+36+8+6+1$.

PROBABILITES

315. Une probabilité P sur l'univers $\Omega=\{a,b,c\}$ vérifie $P(\{a,b\})=\alpha, P(\{b,c\})=\beta$.

On demande les conditions sur α,β pour que P existe et de donner les valeurs des probabilités des évènements élémentaires.

316. On dit que B est presque inclus dans A si $P\,(B\setminus A)=0$.

(a) Montrer que cela équivaut à ce que $P\,(A\setminus B)=P\,(A)-P\,(B)$.

(b) Comment définirait-on le fait que deux évènements sont presque égaux?

Indication : $P\,(A\setminus B)=P\,(A)-P\,(B)+P\,(B\setminus A)$.

REP b) : deux évènements sont presque égaux *ssi* $P\,(A\Delta B)=0$.

317. Comparer $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P\,(A_i)$.

318. Soient A et B deux évènements.

(a) Démontrer que $P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-1$ et préciser le cas d'égalité.

(b) Généraliser à plusieurs évènements.

(c) Une enquête tenue secrète révèle qu'au moins 70% des élèves de terminale détestent le français, au moins 75% la physique-chimie et au moins 80% les mathématiques. Combien d'élèves au moins détestent toutes ces matières à la fois ?

319. 6 chaussettes formant 3 paires se retrouvent mélangées dans un sac ; je tire 3 chaussettes au hasard.

(a) Quelle est la probabilité que les 3 chaussettes appartiennent chacune à une paire différente ?

(b) Remplacer 3 par n. On note p_n la probabilité correspondante.

(c) Déterminer la limite de p_n sans utiliser la formule de Stirling, puis en donner un équivalent en utilisant cette formule.

320. On jette n fois un dé équilibré à n faces.

(a) Quelle est la probabilité p_n que la face une n'apparaisse jamais ?

(b) Limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

321. On tire au hasard, avec remise, deux parties A et B de E ayant n éléments ; quelle est la probabilité que ces deux parties

   (a) soient disjointes

   (b) soient de réunion égale à E

   (c) soient incluses l'une dans l'autre ?

322. On tire au hasard une partie A de E_n, ensemble ayant n éléments ? On note X le nombre déléments de A. Déterminer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

   Réponse : $E(X) = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}}{2^n} = \dfrac{n}{2}$; $V(X) = \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}}{2^n} - \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{n(n+1)}{4} - \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{n}{4}$ d'où $\sigma(X) = \sqrt{n}/2$.

323. On tire au hasard, avec remise, deux parties A et B de E_n, ensemble ayant n éléments ? Quelle est l'espérance m du nombre d'éléments de l'intersection de A et B ? Quelle est l'espérance m' du nombre d'éléments de leur réunion ?

   REP $m = \dfrac{\sum_{A,B\subset E_n} |A\cap B|}{2^{2n}} = \dfrac{\sum_{A,B\subset E_n} |A\cap \overline{B}|}{2^{2n}}$; donc $2m = \dfrac{\sum_{A,B\subset E_n} |A|}{2^{2n}} = \dfrac{\sum_{A\subset E_n} |X|}{2^{n}} = \dfrac{n}{2}$, $m = \dfrac{n}{4}$.

   $m' = \dfrac{\sum_{X,Y\subset E} |X| + |Y| - |X\cap Y|}{2^{2n}} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{4} = \dfrac{3n}{4}$.

324. On jette n fois un dé équilibré à n faces.

   (a) Soit X le nombre d'apparition de la face une. Loi de probabilité de X ?

   (b) On note p_n la probabilité que la face une apparaisse un nombre impair de fois, q_n la probabilité que la face une apparaisse un nombre pair de fois. On demande d'exprimer p_n et q_n sous forme de somme.

   (c) Calculer $p_n + q_n$ et $p_n - q_n$ et en déduire une expression simple de p_n.

   (d) Limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

325. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire p boules avec remise.

   (a) Calculer la probabilité que le numéro de la boule du $p-$ième tirage soit supérieur ou égal à ceux des $p-1$ boules tirées précédemment. Vérifier que l'expression trouvée est bien inférieure ou égale à 1.

   (b) Déterminer la limite de cette probabilité quand $p \to +\infty$, n fixé.

   (c) Déterminer la limite de cette probabilité quand $n \to +\infty$, p fixé.

326. $2n$ électeurs votent pour élire l'un de deux candidats, A et B. Au dépouillement, exactement n électeurs ont voté pour A et n ont voté pour B. Mais un sondage de $2q$ électeurs a eu lieu à la sortie des urnes ($1 \leqslant q \leqslant n$) (on suppose que les électeurs disent exactement pour qui ils ont voté).

   (a) Quelle est la probabilité p_q que ce sondage donne exactement q électeurs ayant voté A et q électeurs ayant voté B ?

   (b) Etudier le sens de variation de la suite finie (p_q).

   Aide : on trouvera $\dfrac{p_{q+1}}{p_q} = \dfrac{q+\frac{1}{2}}{q+1} \cdot \dfrac{n-q}{n-q-\frac{1}{2}}$.

327. L'indépendance des évènements est-elle transitive ?

328. On lance n^2 fois une pièce équilibrée, et on range les résultats "pile" ou "face" dans une matrice carrée d'ordre n.

   (a) Quelle est la probabilité que l'une des colonnes de la matrice soit uniquement formées de pile ?

   Indication : calculer la probabilité p_n de $A_j = \{$ la colonne j est uniquement formée de "pile" $\}$ puis utiliser l'indépendance mutuelle des évènements A_j.

   (b) Déterminer un équivalent de p_n quand n tend vers l'infini.

   REP : $p_n = 1 - (1 - 1/2^n)^n \sim n/2^n$.

329. Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (respectivement q) avec $q < p$. On suppose que les tirs sont indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint les deux cibles consécutivement. Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

330. Un club photo est composé de n membres dont f sont des filles. Un premier membre, tiré au sort, est chargé de photographier un autre membre du club, lui aussi tiré au hasard. Calculer la probabilité que l'élève pris en photo soit une fille.

331. Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A.

    À chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'évènement [l'abeille est sur la fleur A au jour n] et B_n l'événement |[l'abeille est sur la fleur B au jour n] . On pose $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.

    (a) Déterminer des expressions de a_n, puis de b_n en fonction de n.
    (b) Vers quoi tendent les suites (a_n) et (b_n) ? Interpréter.

332. Une maladie est détectée par un test. Sur 1000 personnes testées, 5 sont détectées positives et sont réellement malades, 120 sont détectées positives et ne sont pas malades (les faux positifs), 2 sont détectées négatives et sont en fait malades (les faux négatifs).

    Avec des notations évidentes, calculer $\mathbb{P}(P|M), \mathbb{P}\left(P|\overline{M}\right), \mathbb{P}(M|P), \mathbb{P}\left(M|\overline{P}\right)$ (réponses en pourcentage).

    Réponse : 71%, 12%, 4%, 0,2%.

333. On organise une loterie avec n types de tickets vendus chacun à s euros ; il y a k tickets du $k-ième$ type, qui lorsqu'on les achète, donnent chacun un gain de $n-k$ euros.

    (a) Quelle somme S la vente de de tous les tickets rapporte-t-elle à l'organisateur, et quel est pour lui le coût total S' des lots ?
    (b) Quelle est l'espérance de gain pour l'acheteur d'un ticket ?

334. Etant donné un système complet d'évènements $(A_1, ..., A_n)$ de probabilités respectives $p_1, ..., p_n$, on considère la succession de tests informatiques : $if\ A_1\ then$ ... $elif\ A_2\ then$ ..... $elif\ A_n\ then$....

    Soit X le nombre de tests réellement effectués (dès qu'un évènement est réalisé, les tests suivants ne sont pas effectués).

    (a) Déterminer la loi et l'espérance de X.
    (b) Application numérique : $if\ 0 \leq k \leq 9\ then$... $elif\ \ k = 10\ then$..... $elif$....$elif\ \ k = 15\ then$ ....., puis les tests en sens inverse.
    (c) Dans quel ordre effectuer les tests pour minimiser l'espérance du b) ?

335. Probabilité d'extinction d'une descendance.

    On suppose que chaque individu a, au cours de sa vie, un probabilité p_k d'avoir k enfants (avec $0 \leqslant k \leqslant 3$).

    (a) On désigne par q_n la probabilité que la descendance d'un individu comporte au plus n générations (par exemple, $q_1 = p_0$).
    On demande d'exprimer q_n en fonction de q_{n-1} ; on montrera que q_n est un polynôme de degré 3 en q_{n-1}.
    (b) On prend pour la suite $p_0 = 1/8, p_1 = 3/8, p_2 = 3/8; p_3 = 1/8;$ montrer que q_n tend vers$\sqrt{5} - 2$.
    (c) Quelle est la probabilité que la descendance d'un individu soit infinie ?
    (d) Quelle est l'espérance du nombre de générations engendrées par un individu ?

336. Loi linéaire croissante.

    Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[|1, n|]$ dont la loi de probabilité $P(X = k)$ croit proportionnellement à k.

    (a) Montrer que $P(X = k)$ est défini de façon unique.
    (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
    REP : $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}, V(X) = \dfrac{(n-1)(n+2)}{18}$

337. Loi linéaire décroissante.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[|1,n|]$ dont la loi de probabilité $P(X=k)$ décroit proportionnellement à $n-k$.

(a) Montrer que $P(X=k)$ est défini de façon unique.

(b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

REP : $E(X)=\dfrac{n+1}{3}, V(X)=\dfrac{(n+1)(n-2)}{18}$

338. Loi parabolique.

Soient $n \geqslant 2$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[|0,n|]$ dont la loi de probabilité $P([X=k])$ est du deuxième degré en k, avec annulation aux extrémités 1 et n.

(a) Montrer que $P([X=k])$ est défini de façon unique.

(b) Déterminer $E(X)$ sans calcul, et calculer $V(X)$; on donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$.

REP : $E(X)=\dfrac{n}{2}, V(X)=\dfrac{(n-2)(n+2)}{20}$

339. Loi parabolique bis.

On tire au hasard et simultanément trois nombres entiers situés entre 0 et n compris ($n \geqslant 2$).

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre médian.

(a) Déterminer $P(X=k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.Donner l'allure du diagramme en batons de cette loi de probabilités.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k)=\binom{n+1}{3}$.

(c) Calculer $E(X)$, en utilisant l'expression de $E(n-X)$.

(d) Calculer $V(X)$; on donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$.

340. On tire au hasard successivement, avec remise, trois nombres entiers situés entre 1 et n compris.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre médian (s'il y a deux nombres égaux, le nombre médian est celui-là).

(a) Déterminer $P(X=k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
REP : $6(k-1)(n-k)+3n-2$

(b) Calculer $E(X)$.

341. Soient $a>0$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[|1,n|]$ telle que, $\forall k \in [|1,n|] \quad P([X=k])=a^k$. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle X est effectivement une variable aléatoire et calculer $E(X)$.

REP : $a^{n+1}=2a-1$; $E(X)=\dfrac{a\left(1-a^n-na^n(1-a)\right)}{(1-a)^2}$.

342. Montrer qu'une v.a. réelle qui prend trois valeurs distinctes a sa loi déterminée par son espérance et sa variance.

343. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[|1,n|]$, montrer que $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$ et $E\left(X^2\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)P(X \geqslant k)$.

344. On organise un jeu à N questions indépendantes, de difficulté croissante ; le jeu s'arrête à la première réponse fausse, ou au bout de N réponses exactes.

La probabilité de réussite à la question k est notée p_k et on note $r_k=\prod_{j=1}^{k} p_j=p_1 \ldots p_k$. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de réponses exactes avant le premier échec, ou la fin du jeu.Calculer $P(X \geqslant k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$, et en déduire la loi de probabilité de X. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Montrer que $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{N} r_k$. On suppose qu'il existe deux réels α et β, tels que $p_1=1$, $p_N=\dfrac{1}{N}$ et pour tout entier k,

$1 \leq k \leq N$, $p_k = \alpha k + \beta$, .
Calculer p_k , r_k et $P(X = k)$. On suppose N pair , $N = 2n$.
Soit s_n la probabilité de répondre correctement à la première moitié des questions et d'échouer à la question suivante.
Déterminer un équivalent de s_n quand n tend vers l'infini.
On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. ESPACES VECTORIELS

345. Trouver un ensemble et deux opérations + et . vérifiant tous les axiomes d'espace vectoriel sauf le dernier ($1.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$).

346. (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x^2 + z^2 + 4y^2 - 4xy - 2xz = 0\}$ est-il un sous-$\mathbb{R}-$espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
     (b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / 2x^2 + z^2 + 4y^2 - 4xy - 2xz = 0\}$ est-il un sous-$\mathbb{C}-$espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$?

347. Les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
     (a) $\{(u_n) \in E \ / \ (u_n)$ est bornée$\}$
     (b) $\{(u_n) \in E \ / \ (u_n)$ est monotone$\}$
     (c) $\{(u_n) \in E \ / \ \forall n \ \ u_{n+2} = u_n\}$
     (d) $\{(u_n) \in E \ / \ \forall n \ \ u_{n+1} = \pm u_n\}$

348. Les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
     (a) $\{(u_n) \in E \ / \ (u_n)$ est croissante$\}$
     (b) $\{(u_n) \in E \ / \ (u_n)$ est monotone$\}$
     (c) $\{(u_n) \in E \ / \ (u_n)$ est la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante$\}$

349. Les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
     (a) $\{(u_n) \in E \ / \ \exists p \geqslant 1 / \forall n \ \ u_{n+p} = u_n\}$
     (b) $\{(u_n) \in E \ / \ \forall n \ \ \exists p \geqslant 1 \ / \ u_{n+p} = u_n\}$
     Rep : 01010101
     0010101010

350. Les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
     (a) $\{f \in E \ / \ \exists a > 0 \ \ / \forall x \ \ |f(x)| \leqslant a|x|\}$
     (b) $\{f \in E \ / \ \exists a > 0 \ \ / \forall x \ \ |f(x)| \geqslant a|x|\}$

351. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dont la courbe présente une asymptote (horizontale ou oblique) au voisinage de $+\infty$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

352. Libre ou lié (si lié, donner une combinaison nulle non triviale) ?
     (a) $\left(A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\right)$
     (b) $(\cos, \cos^2, \sin, \sin^2)$
     (c) (f, g, h) avec $f(x) = \cos 2x \cos x, g(x) = \sin 2x \sin x, h(x) = \cos x$.
     REP a) $D = A + B + 2C$. b) libre c) $f + g = 2h$.

353. On pose $f(x) = |x|, g(x) = |x - 1|, h(x) = |x + 1|$.
     (a) Montrer que (f, g, h) est libre.
     (b) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que cette famille engendre et F l'ensemble des fonctions qui sont affines sur $]-\infty, -1]$, affines sur $[-1, 0]$, affines sur $[0, 1]$, et affines sur $[1, +\infty]$. Etudier les inclusions entre E et F.

354. $F = \{M \in \mathcal{M}_{2,3}(K) \ / \ $ les lignes et colonnes de M ont une somme nulle$\}$.
     Justifier sans calcul que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ et déterminer sa dimension.

355. $F = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(K) \ / \ \text{les lignes, les colonnes et les diagonales de } M \text{ ont une somme alternée nulle} \right\}$; justifier que F est un sev de $\mathcal{M}_{3,3}(K)$ et déterminer sa dimenson.

356. $F = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ h & & d \\ g & f & e \end{bmatrix} \in K^8 \ / \ a+b+c = c+d+e = e+f+g = g+h+a \right\}$; justifier que F est un sev de K^8 et déterminer sa dimenson.

357. On donne trois réels $a < c < b$; soit $E = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \ / \ f \text{ est affine sur } [a,c] \text{ et affine sur }]c,b] \right\}$

(a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 4.

(b) Quelle est la dimension de $F = E \cap \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \ / \ f \text{ est affine sur } [a,c] \text{ et affine sur } [c,b] \right\}$?

(c) Montrer qu'une base de F est (f_1, f_2, f_3) où $f_1(x) = x - a,\ f_2(x) = |x - c|,\ f_3(x) = b - x$.

358. Montrer que l'ensemble des suites périodiques à valeurs dans K de période un entier $p > 0$ donné est un sous-espace vectoriel de dimension p de $K^{\mathbb{N}}$.

359. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E , u un vecteur de coordonnées $(a_1, .., a_n)$ dans B. Déterminer à quelle condition la famille $B' = (e_1 - u, ..., e_n - u)$ est une base de E (on pourra commencer par le cas $n = 2$).

360. F est l'ensemble des étoiles magiques à 5 branches de somme nulle ; montrer que F est un sev de dimension 5 de K^{10}.

361. $F = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; $\dim F$? Equations cartésiennes de F ? Base simple de F ?

Rep :$-x + z + 2t = 0$

362. $F = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; $\dim F$? Equations cartésiennes de F ? Base simple de F ?

Rep: $11x - 9y + z + t = 0$

363. $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$; $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}; g(x) = 1/f(x); h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\mathrm{rg}(f, g, h, k)$?

364. Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x_1}, ...\overrightarrow{x_p})$ une famille libre de vecteurs de E et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E; montrer que $\mathcal{G} = (\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{u}, ...\overrightarrow{x_p} - \overrightarrow{u})$ est liée ssi $\exists \alpha_1, ..., \alpha_p$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ tels que $\overrightarrow{u} = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{x_i}$ et que dans ce cas, le rang de la famille $\mathcal{G}$ vaut $p - 1$.

365. On dit qu'une famille de réels $(x_1, ..., x_n)$ est $\mathbb{Q}$-libre si pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{Q}^n \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

(a) Montrer que $(x_1, ..., x_p)$ est $\mathbb{Q}$-libre ssi pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

(b) Montrer que si $p_1, ..., p_n$ sont des nombres premiers distincts, $(\ln p_1, ..., \ln p_n)$ est $\mathbb{Q}$-libre (ce qui montre que la $\mathbb{Q}$-dimension de $\mathbb{R}$ est infinie).

366. $F : \left\{ \begin{array}{c} x + y - z + t = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{array} \right.$; montrer F sev de K^4, en déterminer une base, un supplémentaire G, et définir la projection de base F et de direction G.

367. $F : \{x + y - z - t = 0$,$G : \{x + y + z + t = 0$; montrer F sev de K^4 de dimension 3 (on admettra que de même pour G) ; déterminer une base $\mathcal{B}$ de $F \cap G$ que l'on complètera en deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de F et G.

368. Montrer que les 2 sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: F formé des fonctions T-périodiques, et G formé des fonctions nulles sur $[0, T[$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

RÉELS LIMITES

369. Soit (a_n) une suite de réels > 0 non majorée ; montrer que l'ensemble des quotients d'un entier par un élément de cette suite est dense dans $\mathbb{R}$; qu'obtient-on si $a_n = n, 10^n$, ou 2^n ?

370. Equivalent simple quand x tend vers $+\infty, 0, -\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2+x} - \sqrt[3]{x^3-x^2+x}$.

371. Equivalent simple quand x tend vers $+\infty, 0, -\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2+x} - \sqrt{x^2+x}$.

372. Limite de $\dfrac{\cos x - e^{x^2}}{\cos x - \cos 2x}$, de $\dfrac{\text{ch } x - \text{ch}2x}{\cos x - \cos 2x}$ quand x tend vers 0.

373. Limite de $\left(\tan\left(\dfrac{3}{2}x\right)\right)^{\tan 3x}$, de $\dfrac{\tan 9x}{\tan 3x}$quand x tend vers $\dfrac{\pi}{6}$.

374. Limite de $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$quand x tend vers $+\infty$.

375. $f(x) = \dfrac{\ln\left(x^4+e^x\right)}{x}$;déterminer $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et un équivalent de $f(x) - l$.

376. $f(x) = \dfrac{\ln\left(3e^x - 2e^{-x}\right)}{x}$; D_f ? $\lim\limits_{0} f$?$\lim\limits_{+\infty} f$?

377. Equivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{\sqrt{x^2+x}}$.

378. Limite de $\left(2\sqrt[n]{2}-1\right)^n$quand n tend vers $+\infty$. Limite de $\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$quand n tend vers $+\infty$.

CONTINUITÉ

379. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = |x - \text{arrondi}(x)|$ (arrondi(x) est l'entier le plus proche de x) est continue sur $\mathbb{R}$; tracer.

380. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\{x\}(1-\{x\})}$ ($\{x\}$ est la partie fractionnaire de x) est continue sur $\mathbb{R}$; tracer.

381. Une autre caractérisation des fonctions affines.

Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y : $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

   (a) Montrer que si $f(0) = f(1) = 0$, alors f est périodique ; en déduire qu'elle est nulle.
   (b) Montrer que f est affine.

382. Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 et 1 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(x^2\right) = f(x)$.

383. Soit f une fonction croissante sur $]0, +\infty[$ telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $]0, +\infty[$.

   (a) Montrer que si $0 < a \leqslant b$ alors $0 \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \dfrac{f(b)}{b}(b-a) \leqslant \dfrac{f(a)}{a}(b-a)$.
   (b) En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.
   (c) Donner un exemple non affine.
   (d) Montrer que si de plus, f est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors $f'(x) \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$.

384. Donner un exemple de fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ et qui possède une fonction réciproque (avec justification).

385. :

   (a) Donner un exemple de fonction non constante dont l'ensemble des périodes soit dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que si une fonction dont l'ensemble des périodes est dense dans $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle y est constante.

386. :

(a) Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I borné (non forcément fermé) est bornée sur cet intervalle.

(b) En déduire que le produit de deux fonctions lipschitziennes sur I est une fonction lipschitzienne. Est-ce encore exact si on remplace I par $\mathbb{R}$?

387. Donner un exemple de fonction continue et bornée, qui n'est pas uniformément continue.

388. On pose $f(x) = \sin x^2$; f est-elle continue, uniformément continue, lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?

389. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $\alpha n \leqslant x < \alpha(n+1)$ alors $|f(x)| < n + 1 + |f(0)|$.

(b) En déduire qu'il existe $a, b > 0$ tels que $|f(x)| \leqslant ax + b$ pour tout $x \geqslant 0$ (faire une figure ilustrative).

390. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \geqslant x$ pour tout x et dont le taux d'accroissement reste constamment dans l'intervalle $[0, 1]$.

(a) Vérifier que f est continue et croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner un exemple autre que $f(x) = x + c$.

(c) Montrer que $|f(x)| \leqslant |f(0)| + |x|$ pour tout x puis que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

391. Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - ... - a_0$ un polynôme à coefficients réels, avec les $a_i \geqslant 0$, $a_0 > 0$; montrer que P possède une unique racine > 0.

Indication : pour l'unicité, considérer $f(x) = \dfrac{P(x)}{x^n}$ pour $x > 0$.

392. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ vérifiant $f(0) \geqslant 0$; montrer qu'elle possède un point fixe dans les cas suivants :

(a) $f(x) \underset{x\to+\infty}{<<} x$.

(b) la courbe de f en l'infini possède une asymptote d'équation $y = x - a$ avec $a > 0$.

393. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur un intervalle $[a, b]$ vérifiant $f([a, b]) \subset [g(a), g(b)]$ (figure) ; montrer qu'il existe c de $[a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$. Montrer que c'est faux si on ne suppose pas f continue.

394. Soient f et g deux fonctions réelles continues sur un intervalle $[a, b]$ vérifiant $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$ (figure) ; montrer qu'il existe c de $[a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$. Montrer que c'est faux si on ne suppose pas f continue.

395. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ possédant un *cycle* (c'est-à-dire une liste de réels distincts $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que $f(a_k) = a_{k+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $f(a_n) = a_1$). Montrer qu'alors elle possède un *point* fixe (commencer par $n = 2$). Donner un exemple avec $n = 3$.

396. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ayant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$; montrer qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Atteint-elle forcément ses bornes sur $\mathbb{R}$?

397. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continues sur un intervalle fermé I ; on pose $a = \sup\limits_I f$, $b = \sup\limits_I g$, $c = \sup\limits_I (f+g)$.

(a) Montrer $a + b \geqslant c$.

(b) Rappeler pourquoi il existe x_1, x_2 de I tels que $a = f(x_1), b = g(x_2)$.

(c) Montrer que si $x_1 = x_2$, $a + b = c$.

(d) Montrer que si $x_1 \neq x_2$, $f(x) < a$ pour $x \neq x_1$ et $f(x) < b$ pour $x \neq x_2$, alors $a + b > c$.

398. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle ouvert I, dont la somme est continue sur I ; montrer que f et g sont continues sur I.

POLYNÔMES

399. Trouver des formules pour $\deg(P \circ Q)$ et $\mathrm{val}(P \circ Q)$.

400. Résoudre dans $K[X]$: $P \circ P = P$.

401. Résoudre dans $K[X]$: $P \circ P = P^2$.
Rep : $1, 0, X^2$.

402. Déterminer les fonctions polynomiales $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bijectives dont la réciproque est aussi polynomiale.

403. Montrer que la famille $\left((X-a)^k (X-b)^{n-k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ où a et b sont deux éléments de K distincts est une base de $K_n[X]$.

404. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $P_k = (1+X)^n - 2^n X^k$; quel est le rang r de la famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, ..., P_n)$?

405. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $P_k = \left(X^{n+1} - 1\right) - (n+1)(X-1)X^k$; quel est le rang r de la famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, ..., P_n)$?

406. $F = \{P \in K_n[X] \ / \ P(a) = 0\}$ où a est un élément de K fixé ; montrer que K est un supplémentaire de F dans $K_n[X]$ et déterminer une base de F.

407. Déterminer tous les polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(2X) = 2P(X)$. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non polynomiale vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}\ f(2x) = 2f(x)$.

408. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P = \prod_{k=1}^{n} (\cos a_k + X \sin a_k)$ par $X^2 + 1$.

REP : $\cos\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + X \sin\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

409. Soit n un entier naturel et $F = \{P \in K[X] \ / \ XP'' + (1+X)P' - nP = 0\}$.

(a) Montrer que $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ appartient à F ssi pour tout $k \geqslant 1 \quad k^2 a_k = (n-k+1)a_{k-1}$.

(b) En déduire que les éléments de F sont de degré $\leqslant n$ et, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de F, calculer a_k en fonction de a_0.
Quelle est la dimension de F ?

410. Soit A un polynôme non constant, p un entier naturel $< \deg(A) = m$, F l'ensemble des polynômes P dont le reste dans la division par A est de degré $\leqslant p$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $K[X]$.

(b) Soit n un entier $\geqslant m$. Déterminer la dimension de $K_n[X] \cap F$.
REP : $\dim K_n[X] \cap F = n - m + p + 2$.

411. Déterminer le pgcd D de $A = X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - 2$ et de $B = X^5 - X^3 + X^2 - 2X - 2$ par l'algorithme d'Euclide ; déterminer U et V tels que $AU + BV = D$.

412. Montrer que si n et m sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux, $(X^n - 1)(X^m - 1)$ divise $(X^{nm} - 1)(X-1)$.

413. Soit $P = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers, $a_0 a_n \neq 0$.

(a) Montrer qu'une racine rationnelle de P ne peut être que le quotient d'un diviseur de a_0 par un diviseur de a_n.

(b) Si a_0 est un nombre premier p et a_1 un nombre premier q, combien y a-t-il de racines rationnelles possibles ? Donner un exemple simple où p/q est racine, un exemple où 1 est racine, un exemple où $1/q$ est racine.

(c) Résoudre $2z^3 - 3z^2 + 2z - 3 = 0$.

414. Soit $P = X^n + a_{n-1}X + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers, $a_0 \neq 0$.

(a) Montrer qu'une racine rationnelle de P est forcément un entier qui divise a_0.

(b) Soit θ un réel et n un entier naturel ; on pose $2\cos n\theta = u_n$; vérifier que $u_{n+2} = 2\cos\theta.u_{n+1} - u_n$, et en déduire que u_n s'exprime comme un polynôme unitaire en $x = 2\cos\theta$.

(c) Soit r un rationnel tel que $\cos r\pi$ est rationnel ; montrer que $2\cos(r\pi)$ est racine d'un polynôme du type du début de l'exercice, et en déduire que $\cos r\pi$ ne peut être égal qu'à $0, \pm 1, \pm\dfrac{1}{2}$. En déduire les rationnels r tels que $\cos r\pi$ soit rationnel.

415. Soit a un élément de K différent de 1 et $P \in K[X]$ un polynôme tel que $P(k) = a^k$ pour tout entier k de $[1, n]$. Montrer que P est au moins de degré $n-1$.

Indication : $P(X+1) - aP(X)$.

416. Soit $P \in K[X]$ un polynôme tel que $P(k) = 1/k$ pour tout entier k de $[1, n]$.

(a) En considérant le polynôme $Q = XP(X) - 1$, montrer que P est au moins de degré $n-1$.

(b) Montrer qu'il existe un et un seul poynôme P_n de degré $n-1$ tel que $P_n(k) = 1/k$ pour tout entier k de $[1, n]$ défini par
$$P_n = \frac{a_n(X-1)\dots(X-n)+1}{X}$$
(on donnera la valeur de a_n).

(c) Calculer $P_n(n+1)$.

417. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

(a) $P(n) = 1/n$ pour tout naturel non nul n.

(b) $P(n) = 2^n$ pour tout naturel n.

(c) $P(x) = e^x$ pout tout réel x entre 0 et 1.

418. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels, scindés sur $\mathbb{R}$, tels que $P(X)P(X+1) = P\left(X^2\right)$.

Indication : montrer d'abord que les seules racines possibles d'un tel polynôme sont 0 et 1.

419. Soient $x_1, ..., x_p$ p éléments distincts de K. On considère l'ensemble
$$F = \{A \in K[X] \ / \ A(x_1) = A(x_2) = \dots = A(x_p)\}$$

(a) Montrer que F est un sev de $K[X]$ et que les éléments de F sont les polynômes de la forme $(X-x_1)\dots(X-x_p)Q +$ a où Q est un polynôme et a une constante.

(b) Soit $G = \text{vect}\left(X, X^2, ..., X^{p-1}\right)$; montrer que $K[X] = F \oplus G$ (indication : effectuer la division euclidienne de P par $(X-x_1)\dots(X-x_p)$).

(c) Quelle est la dimension de $F \cap K_n[X]$?

420. :

(a) Montrer que si deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, alors ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) En déduire qu'un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ a toutes ses racines, réelles ou complexes, simples.

(c) En déduire qu'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 3 ayant une racine réelle multiple a forcément trois racines rationnelles (en comptant les ordres). Mais donner un exemple de polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 3 n'ayant pas de racine rationnelle.

421. Soient a et b deux éléments de K distincts, et k un élément de K.

(a) Montrer que les polynômes P vérifiant $P(b) = kP(a)$ sont les polynômes de la forme $\alpha\left(k\frac{X-a}{b-a} + \frac{X-b}{a-b}\right) +$ $(X-a)(X-b)Q$ où Q est un polynôme et α un élément de K. Que cela donne-t-il pour $k=1$?

(b) L'ensemble des polynômes précédents forme un espace vectoriel F ; Quelle est la dimension de $F \cap K_n[X]$?

422. Montrer que la fonction $\sqrt{}$ n'est pas rationnelle, ce qui signifie qu'il n'existe pas de polynômes P et Q à coefficients réels tels que $\forall x \geqslant 0\ \sqrt{x} = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

423. Soit P un polynôme de degré n, a un élément de K. Montrer que $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} P^{(k)}$.

   (a) En écrivant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et en utilisant la formule du binôme.
   (b) En utilisant la formule de Taylor pour P en x_0 : $P(x_0 + X) = ...$

424. Montrer que les racines de $1 - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{X^{2n}}{(2n)!}$ sont d'ordre 2 au maximum.

425. Déterminer l'ordre de 1 dans $P = X^{2n+1} - (2n+1)(X^{n+1} - X^n) - 1$

   (a) Par les dérivées.
   (b) En remplaçant X par $1 + X$.

426. Trouver a, b, c pour que $X^{2n+1} + aX^{n+1} + bX^n + c = P$ soit divisible par $(X-1)^3$ .Déterminer alors l'ordre de 1 dans P.

427. Que vaut $f(x)$?

428. Soit P un polynôme non constant qui est multiple de son polynôme dérivé.

   (a) Montrer qu'il existe a tel que $nP = (X-a)P'$.
   (b) Vérifier que pour tout naturel k, $nP^{(k)} = (X-a)\ P^{(k+1)} + kP^{(k)}$.
   (c) En déduire que a est racine d'ordre n de P et en déduire la forme générale de P.

429. Déterminer un polynôme P_0 de degré $\leqslant 3$ tel que $P_0(0) = 1, P_0'(0) = 0, P_0(1) = 0, P_0'(1) = 0$; puis déterminer tous les polynômes P vérifiant les mêmes propriétés.

   (a) Montrer que les polynômes P scindés sur $\mathbb{R}$ pairs (vérifiant $P(-X) = P(X)$) ont pour forme générale $P = a\prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - x_k^2\right)^{\alpha_k}$ où les x_k sont des réels >0.
   (b) Montrer que la forme générale des polynômes pairs réels est alors $a\prod_{k=1}^{p} \left(X^2 - a_k\right)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^{q} \left(\left(X^2 + \rho_k^2\right)^2 - 4\rho_k^2 \cos^2\theta_k X^2\right)^{\beta_k}$ où les a_k sont des réels, les ρ_k sont des réels > 0 , les θ_k des réels différents de $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

430. Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ \ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\, z|^n$.

431. On rappelle que si $x_1, ..., x_n$ sont n éléments de K distincts, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe un unique polynôme de degré $\leqslant n-1$ noté L_i tel que $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant n$, et que $L_i = \dfrac{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq i} (X - x_k)}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq i} (x_i - x_k)}$; on demande de démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\leqslant 2n-1$ noté M_i tel que $M_i(x_k) = 0$ et $M_i'(x_k) = \delta_{i,k}$ pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant n$, et d'en donner une expression simple à partir de L_i.

    Rep : $M_i = (X - x_i) L_i^2$

432. :
    (a) Montrer que $X^3 - X^2 + 1$ possède une unique racine réelle a.
    (b) Déterminer la décomposition de $X^5 + X + 1$ en produit de facteurs irréductibles réels, en utilisant a.

433. Factoriser $\left(X^2 + X + 1\right)^2 + 1$ dans $C[X]$ puis dans $R[X]$.

434. Montrer que le polynôme à coefficients réels $X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + s$ possède deux couples de racines réelles opposées ssi $p = r = 0, s \geqslant 0$ et $q \leqslant -2\sqrt{s}$.

435. Soit $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$ un polynôme normalisé à coefficients complexes dont toutes les racines ont un module inférieur ou égal à 1 ; montrer en utilisant les relations entre coefficients et racines que $|a_k| \leqslant \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

436. Soient a, b, c les 3 racines de $X^3 + pX^2 + qX + 1$; déterminer le polynôme unitaire ayant pour racines :
    (a) $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$.
    (b) ab, bc, ca.
    (c) $a + b, b + c, c + a$.

437. Soit ABC un triangle du plan complexe, et soient a, b, c les affixes respectives de A, B, C.
    (a) Montrer que ABC est équilatéral ssi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
    (b) En déduire la condition sur p, q, r pour que le polynôme $X^3 + pX^2 + qX + r$ ait ses trois racines formant un triangle équilatéral.

438. Soient a, b, c, d 4 complexes de module 1, σ_i les fonctions symétriques associées.
    (a) Montrer que $\overline{\sigma_1} = \frac{\sigma_3}{\sigma_4}$ et des formules similaires pour $\overline{\sigma_2}, \overline{\sigma_3}, \overline{\sigma_4}$.
    (b) Qu'en déduit-on pour $\frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_4}$, $\frac{(\sigma_2)^2}{\sigma_4}$?

DÉRIVABILITE

439. :
    (a) Soit V un voisinage de x_0 et f et g deux fonctions définies sur V et dérivables en x_0 ; montrer que si $\forall x \in V \quad f(x) \leqslant g(x)$, et $f(x_0) = g(x_0)$ alors $f'(x_0) = g'(x_0)$.
    (b) Application : $f(x) = x \cos x$; calculer $f'(k\pi)$ (k entier) sans calculer $f'(x)$ d'une façon générale.

440. Soit f une application de $[0, 1]$ dans lui-même, croissante, vérifiant $f \circ f = f$.
    (a) On suppose f continue sur $[0, 1]$; justifier qu'il existe $a \leqslant b$ tels que $f([0, 1]) = [a, b]$; déterminer alors f sur $[a, b]$ puis sur $[0, a]$ et $[b, 1]$.
    (b) Montrer que si f est dérivable sur $[0, 1]$, alors f est constante ou l'identité.

441. :
    (a) Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et continues en 0 telles que $f(2x) = f(x)$ pour tout x. Montrer que l'hypothèse de continuité en 0 est indispensable pour obtenir ces solutions.

(b) En déduire toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 telles que $f(2x) = 2f(x)$ pour tout x (indication : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$). Montrer que l'hypothèse de dérivabilité en 0 est indispensable pour obtenir ces solutions.

442. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

REP : ax^2.

443. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

REP : ax^2.

444. $f(x) = e^x + ax$ pour $x \geqslant 0$ et $b - \cos x$ pour $x < 0$.
Quelle est la classe maximale (D^0, C^0, C^1, C^2) de f en 0 suivant les valeurs de a et b ?

445. $f(x) = \dfrac{\ln(2e^x - e^{-x})}{x}$.

(a) D_f ?

(b) Prolonger f par continuité.

(c) Le prolongement $\widetilde{f}$ est il dérivable en 0 (on donne $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ et $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$) ?

(d) Est-il de classe C^1 ?

446. $f(x) = \cos\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$, et $f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{-x}$ pour $x \leqslant 0$; montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

447. $f(x) = e^x + x$; étudier f, définir et étudier f^{-1}, déterminer la classe de f^{-1},tracer les deux courbes, donner les valeurs exactes de $f^{-1}(1)$ et $(f^{-1})'(1)$ et des valeurs approchées de $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

448. $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}}$

(a) Prolonger f par continuité en 0.

(b) Montrer que f est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et de dérivée s'annulant une infinité de fois dans tout voisinage de 0.

449. Calculer la dérivée $(n+1)$ième de $f : x \mapsto x^n \ln x$.

450. Calculer la dérivée $n$ième de $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$. Montrer que $f^{(n)}(1) = (-1)^n e \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n!$.

451. Appliquer la formule de Leibniz à la relation $\tan' = 1 + \tan^2$ et en déduire que les dérivées successives de tan sont toutes constamment >0 sur $[0, \pi/2[$.

452. On pose $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; en appliquant la formule de Leibniz à $x \mapsto xf(x)$, déterminer une relation de récurence permettant de calculer les termes de la suite $(f^{(n)}(x))$; calculer $f^{(4)}(1)$ par cette méthode.

453. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$; montrer que pour tout $d \notin [a, b]$, il existe un point de la courbe de f sur $[a, b]$ où la tangente passe par $(d, 0)$.

Indication : $\dfrac{f(x)}{x-d}$ (faire une figure).

454. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , soit A et B deux points distincts de sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ tels que la tangente à (C) en A passe par B ; montrer qu'il existe un point C de $(\mathcal{C})$ tel que la tangente à $(\mathcal{C})$ en C passe par A.

455. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$, $a<b$ telle que $f'(a)>0$ et $f'(b)<0$ (f' n'étant pas supposée continue).

Montrer que f' s'annule sur $[a,b]$. On montrera d'abord qu'il existe x_1 tel que $f(x_1)>0$, qu'il existe x_2 tel que $f(x_2)<0$, puis que f n'est pas injective, et on en déduira la conclusion cherchée.

456. Montrer que si P est un polynôme réel de degré n, l'équation $P(x)=e^x$ possède au plus $n+1$ solutions et que si P n'est pas constant, l'équation $P(x)=\sin x$ possède un nombre fini de solutions.

457. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $k>0$ tel que pour tout x, $f'(x)\geqslant k$;

   (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Indication : utiliser le TAF sur $[0,x]$.

   (b) Montrer que ce résultat est faux si l'on suppose seulement $f'(x)>0$ pour tout x.

458. Soit f une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$; étudier les diverses implications entre a), b), c).

   (a) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} l\in\mathbb{R}$

   (b) $f(x+a)-f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $a>0$.

   (c) $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
   réponse : a => b ; c => b ; a et non c : sin(x ^{2})/x : c et non a : ln x. le reste s'en déduit...

459. Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a,b]$, n fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$ pour $0\leqslant k\leqslant n-1$. Montrer qu'il existe n valeurs distinctes dans $]a,b[$ où $f^{(n)}$ s'annule.

FRACTIONS RATIONNELLES

460. Soit F une fraction rationnelle ; montrer que si F n'est pas de degré nul, alors $\deg F'=\deg F-1$, mais que si F est de degré nul alors $\deg F'\leqslant\deg F-2$; en déduire que par exemple, il n'existe pas de fraction rationnelle dont la dérivée soit $1/X$.

461. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F dont la dérivée soit de degré -1.

462. Soit P/Q la forme irréductible d'une fraction rationnelle F ; donner une CNS sur P et Q pour que F soit paire (resp. impaire).

463. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k^4}{k^2-1}$;

REP : $(n-1)(4n^4+14n^3+34n^2+33n+6)/12/n/(n+1)$

464. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^6-X^4+3X^3-3X^2+3X+1}{X^5-2X^3+X}$:

1/(-1 + X)^2 + 1/X + 2/(1 + X)^2 + X

465. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^5-X^4+2X^3-3X^2+2X+1}{X^4-X^3-X^2+X}$: X+1/((X-1)^2)+1/X+2/(X+1)+1/(X-1)

466. Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^6+X^5-X^4+3X^3+3X^2-2X-1}{X^4+X^3-X^2-X}$: X^2+1/(X-1)+1/X+2/(X+1)

467. Calculer$\displaystyle\sum_{n\geqslant2}\frac{n^2+n+1}{n^4-n^2}$, sachant que $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

468. Soit P un polynome de degré n à racines simples $x_1,...,x_n$.

   (a) Décomposer $1/P$ en éléments simples en utilisant P'.

   (b) En déduire que si $n\geqslant2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P'(x_k)}=0$ et si $n\geqslant3$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{P'(x_k)}=0$.

469. $A = (X-a)^n, B = (X-b)^m, A \neq B$; montrer que la recherche de la décomposition en éléments simples de $1/AB$ revient à la recherche de la relation de Bézout entre A et B. Appliquer à $(X-1)^3$ et X^2.

APPLICATIONS LINÉAIRES

470. Donner un exemple d'application linéaire de K^3 dans K^4 dont le noyau soit la droite $x = y = z$ et dont l'image soit incluse dans l'hyperplan $x + y - z - t = 0$. Quelle est alors cette image ?

471. Donner un exemple d'endomorphisme de K^3 dont l'image soit la droite $x = y = z$ et dont le noyau contienne cette image. Quel est alors ce noyau ?

472. Donner un exemple d'endomorphisme de K^4 dont l'image soit l'hyperplan $x + y + t = 0$ et dont le noyau soit inclus dans cette image. Quel est alors ce noyau ?

473. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$dans lui même qui à toute fonction f fait correspondre la fonction $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(x) = f(x+T) - f(x) \quad (T > 0$ fixé) ; vérifier que φ est linéaire et déterminer son noyau et son image.

474. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$dans lui même qui à toute fonction f fait correspondre la fonction $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(x) = f(x) - f(-x)$; vérifier que φ est linéaire et déterminer son noyau et son image. Pour l'image, on montrera d'abord qu'elle est incluse dans un sev F de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bien connu, puis on montrera l'inclusion réciproque ; indication : calculer $\varphi(f)$ pour f impaire.

475. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
   (a) Montrer que $\dim \ker f \leqslant \dim \ker f^2 \leqslant 2 \dim \ker f$ (indication : $\ker f^2 = \ker f \oplus G$, et la restriction de f à G est injective).
   (b) Qu'en déduit-on pour $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$?
   (c) Exemple où $\dim \ker f^2 = 2 \dim \ker f$?

476. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ .Montrer

$$g \circ f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective, } g \text{ est surjective et } \mathbb{F} = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f$$

477. Soient f, g deux endomorphismes bijectifs d'un plan vectoriel E_2. Montrer que (f, g) libre dans $L(E_2)$ équivaut à $\exists \overrightarrow{x} \in E_2 \ / \ (f(\overrightarrow{x}), g(\overrightarrow{x}))$ libre dans E_2.

   L'une des implications est facile, et on montrera l'autre par contraposée, et en se plaçant dans une base de E_2.

478. Soit φ l'application de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui même qui à f fait correspondre $f' - f$, vérifier qu'elle est linéaire et étudier son injectivité et sa surjectivité.

479. Montrer que les espaces vectoriels $(K[X])^2$ et $K[X]$ sont isomorphes. L'isomorphisme trouvé est-il un isomorphisme d'anneaux ?

480. Soit T l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans lui même qui à f fait correspondre $T(f)$ définie par $(T(f))(x) = f(x+1)$.
   (a) Vérifier que T est linéaire.
   (b) Soit $a > 0$; Donner un exemple de f non nulle telle que $T(f) = af$; qu'en déduit-on pour l'injectivité de $T - a.Id$?
   (c) Donner un exemple de f non nulle telle que $T(f) = -f$.
   (d) Soit $a > 0$; Donner un exemple de f non nulle telle que $T(f) = -af$.

481. Soit f un endomorphisme d'un plan vectoriel réel E_2 vérifiant $f^2 = -id$.
   (a) Montrer que f est bijectif et donner son inverse.
   (b) Montrer qu'il existe une base de E_2 où la matrice de f est $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

482. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $(f - \lambda id) \circ (f - \mu id) = 0$ avec $\lambda \neq \mu$.
   (a) Montrer que $\ker(f - \lambda id) = \operatorname{Im}(f - \mu id)$ et donner une égalité similaire.
   (b) Montrer que $E = \ker(f - \lambda id) \oplus \ker(f - \mu id)$ (analyse et synthèse).

(c) En déduire que si E est de dimension finie, f possède une matrice diagonale.

(d) Qu'obtient-on si $\lambda = 0$ et $\mu = 1$?

(e) Qu'obtient-on si $\lambda = 1$ et $\mu = -1$?

483. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E_3 de dimension 3 tel que $f^3 = 0$ mais $f^2 \neq 0$.

(a) Montrer que si $f^2(\overrightarrow{a}) \neq \overrightarrow{0}$, $\left(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{a}), f^2(\overrightarrow{a})\right)$ est une base.

(b) Quelle est la matrice de f dans cette base ?

(c) Déterminer le noyau et l'image de f.

484. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n vérifiant $f^n = 0$ mais $f^{n-1} \neq 0$.

(a) Montrer que si $f^{n-1}(\overrightarrow{a})$ est non nul, alors la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{a}), ..., f^{n-1}(\overrightarrow{a})\right)$ est une base de E.

(b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

(c) Déterminer le noyau et l'image de f.

485. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E_3 de dimension 3 tel que $f^2 = 0$ mais $f \neq 0$.

(a) Montrer qu'il existe trois vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que (e_1, e_2) soit une base de $\ker f$ et $e_1 = f(e_3)$.

(b) Vérifier que $(e_{1,}e_2, e_3)$ est une base de E_3 et écrire la matrice de f dans cette base.

(c) Caractériser les endomorphismes de E_3 de carré nul.
TAYLOR, DL et ÉTUDE DE FONCTION

486. Soient $a < x_0 < b$ trois réels fixés et f une fonction numérique de classe C^1 sur$[a, b]$, 2 fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(x_0) - g(x_0) = -\dfrac{(x_0 - a)(b - x_0)}{2} f''(c)$ où g est l'unique fonction affine prenant les mêmes valeur que f en a et en b.

Indication : poser $\varphi(x) = f(x) - g(x) + \lambda (x_0 - a)(b - x_0)$ où λ est un réel (que l'on ne demande pas de calculer) déterminé de façon à ce que $\varphi(x_0) = 0$, remarquer que φ s'annule trois fois et appliquer le théorème de Rolle.

487. Soient $a < b$ deux réels fixés et f une fonction numérique de classe C^1 sur$[a, b]$, 2 fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \dfrac{(b - a)^2}{2} f''(c)$.

Indication : poser $\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - \lambda (b - x)^2$ où λ est un réel (que l'on ne demande pas de calculer) déterminé de façon à ce que $\varphi(a) = 0$, et appliquer le théorème de Rolle.

488. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f'(0) = 0$; montrer que la fonction g définie pour tout $x \geqslant 0$ par $g(x) = f(\sqrt{x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (on trouvera $g'(0) = f''(0)/2$).

489. DLP$_7$ de $\sin^2 x \tan x$ en 0.

REP : x^3+x^7/15.

490. Déterminer le DLP$_3$ de $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ en $x_0 \neq 0$, sans utiliser la formule de Taylor-Young. En déduire pour quelle valeur x_0 la courbe de f possède en $(x_0, f(x_0))$ un point d'inflexion ; tracé de la courbe au voisinage de ce point.

REP : exp(-1/x0)/x0^2*u+(-1/2*exp(-1/x0)*(2*x0-1)/x0^4)*u^2+1/6*exp(-1/x0)*(6*x0^2-6*x0+1)/x0^6*u^3

491. Déterminer le DLP$_3$ de $f(x) = xe^{-x}$ en x_0, sans utiliser la formule de Taylor-Young. En déduire pour quelle valeur x_0 la courbe de f possède en $(x_0, f(x_0))$ un point d'inflexion ; tracé de la courbe au voisinage de ce point.

492. Déterminer le DLP$_3$ de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ en $x_0 > 0$, sans utiliser la formule de Taylor-Young. En déduire pour quelle valeur x_0 la courbe de f possède en $(x_0, f(x_0))$ un point d'inflexion ; tracé de la courbe au voisinage de ce point.

493. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$.Montrer que f possède un DLP$_3$ en 0 ; qu'en déduit-on pour f en 0 ? Tracer l'allure de la courbe au voisinage de 0.

494. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$.

(a) Montrer que f possède un DLP$_3$ en 0 ; qu'en déduit-on pour f en 0 ?

(b) Etudier la fonction f et tracer sa courbe.

495. : Inégalités de Huygens.

(a) Déterminer a et b de sorte que $a\sin x + b\tan x - x$ soit, quand x tend vers 0, un infiniment petit minimal (c'est-à-dire que la partie principale de $a\sin x + b\tan x - x$ soit de degré maximal) ; ensuite, pour cette valeur de (a,b), comparer x et $a\sin x + b\tan x$ sur $[0,\pi/2[$.

(b) Même question en remplaçant $\tan x$ par $\sin 2x$.

496. Soit f une fonction injective et de classe C^∞ au voisinage de 0, de DLP$_3$ en 0 : $f(x) = x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$; déterminer en fonction de a et b le DLP_3 de f^{-1} en 0. Vérifier pour $f(x) = \ln(1+x)$.

497. Partant du dévelopement $\tan x = x + o(x)$ et utilisant la relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, déterminer le DLP$_3$ de tan en 0, puis réutilisant ce DL, obtenir le DLP$_5$, puis le DLP$_7$.

498. Déterminer le DLP$_7$ de tan en 0 par intégration de celui de $1/\cos^2$.

499. Déterminer le DLP$_5$ de f défine par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$.

500. Où est l'erreur dans le raisonnement suivant ($x \to +\infty$) ?

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x(x+1)} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x(x+1)} \sim \frac{1}{x^2}$$

Déterminer le bon équivalent.

501. Equivalent quand $x \to +\infty$ de $f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x+1} - \mathrm{ch}\sqrt{x}$; limite quand $x \to +\infty$ de $(f(x))^{1/\sqrt{x}}$.

502. DLG de $\dfrac{x^{\sqrt{x+1}}}{(x+1)^{\sqrt{x}}}$ quand $x \to +\infty$ à la précision $1/\sqrt{x}$.

REP : $1 + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

503. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; DLP en 0 à l'ordre $2n+1$ et DLG en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^{2n}}$ (écrit avec un $\sum$ et avec des ...)

504. $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x-1}$; DL à tout ordre de f en 0, en 1, en $\pm\infty$.

505. Etudier f définie par $f(x) = x^{x^{-x}}$.

506. Un point $P(t,1)$ parcourt la droite $y = 1$; soit Q le projeté de P sur Ox et M le projeté de Q sur (OP) ; on demande de tracer le lieu (C) de M quand P varie (appelé cissoïde de Dioclès).

On montrera que (C) a pour équation cartésienne $x^2(1-y) = y^3$, que l'on mettra sous la forme $x = \pm f(y)$ et on étudiera f.

507. Etudier une fonction permettant de tracer la courbe d'équation cartésienne $y^2(x-1) = x^3$. On étudiera la position par rapport aux asymptotes.

508. Etudier une fonction permettant de tracer la courbe d'équation cartésienne $y^2(3x+1) = x^2(x-1)$. On étudiera la position par rapport aux asymptotes. On montrera que les 3 asymptotes forment un triangle équilatéral.

509. $f(x) = \dfrac{x^3+6x}{3x^2+2}$; étudier f (+ branches infinies) ; étudier les suites récurrentes associées à f.

510. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{e^{1/x}-1}$; on calculera d'abord $f(x)+f(-x)$ et on en déduira une réduction de l'ensemble d'étude. On prolongera par continuité en 0 à droite et étudiera la dérivabilité en 0 à droite. On n'oubliera pas la branche infine qui s'obtiendra par un DL.

MATRICES

511. Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre 2 qui commutent avec leur transposée.

512. Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $|i-j| \geqslant 2 \Rightarrow A(i,j) = 0$; montrer qu'alors $|i-j| \geqslant 3 \Rightarrow A^2(i,j) = 0$.

513. Les ensembles $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ / \ x \in K^* \right\}$ et $H = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ / \ x, y \in K^* \right\}$ sont-ils des groupes pour la multiplication des matrices ?

514. : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: calculer A^n pour n entier naturel ; peut-on étendre les résultats à n entier négatif ?

515. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: calculer A^n pour n entier naturel en utilisant la formule du binôme ; peut-on étendre les résultats à n entier négatif ?

516. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$: calculer A^n pour n entier naturel en utilisant la formule du binôme ; peut-on étendre les résultats à n entier négatif ?

517. On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices $M(a,b) = \begin{bmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{bmatrix}$ pour a et b éléments de K.

    (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau commutatif de $M_2(K)$. Quelle loi $*$ faut-il mettre sur K^2 pour que $(K^2, *)$ soit isomorphe à $(\mathcal{A}, \times)$?

    (b) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{A}$. Montrer que les éléments non inversibles non nuls sont des diviseurs de 0 dans $\mathcal{A}$.

518. Montrer qu'une matrice A de $M_{np}(K)$ est de rang 1 si et seulement si A est le produit d'une matrice colonne non nulle par une matrice ligne non nulle.

519. Soit A une matrice de $M_n(K)$ de rang 1 ; montrer qu'il existe un nombre α tel que pour tout p entier $\geqslant 1$, $A^p = \alpha^{p-1} A$

    (a) Méthode 1 : montrer d'abord que $A = CL$ où L est une matrice ligne et C une matrice colonne et utiliser le fait que LC est un nombre.

    (b) Méthode 2 : soit f l'endomorphisme de K^n associé à A ; montrer que $f(\overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{x})\overrightarrow{e}$ et calculer $f^p(\overrightarrow{x})$.

520. Montrer que si A et B sont deux matrices de $M_n(K)$ vérifiant trace(AM) = trace(BM) pour toute matrice M de $M_n(K)$, alors $A = B$. A l'injectivité de quelle application ceci équivaut-il ?

521. Déterminer le rang de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & .. & 0 \\ 1 & 0 & 1 & .. & & & .. \\ 0 & 1 & 0 & .. & & & \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & \\ & & & .. & 0 & 1 & 0 \\ .. & & & .. & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & .. & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

522. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(K)$ dont tous les coefficients diagonaux sont distincts ; on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(K)$ défini par $f(M) = MD - DM$. On demande de déterminer le noyau et l'image de f.

523. En dimension 3, un vecteur u a des coordonnées (x,y,z) dans une base (i,j,k) et des coordonnées (X,Y,Z) dans une base (I,J,K) vérifiant $X = x+2y$, $Y = x+y-z$, $Z = x-y+2z$; on demande les expressions de I,J,K en fonction de i,j,k.

524. On donne dans un espace vectoriel de dimension finie trois bases $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$; On connait la matrice P_1 de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ et la matrice P_2 de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_2$; on considère l'endomorphisme f qui transforme la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$.

    (a) Quelle est en fonction de P_1 et P_2 la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_0$?

    (b) Faire une application numérique où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases très simples.

525. Soit f l'endomorphisme de matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$;

    (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$, non obtenue par permutation des éléments de $\mathcal{B}$, dans laquelle f a aussi pour matrice la matrice A.

    (b) Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, que peut on alors dire de A et P ? Vérifier.

    (c) Déterminer une base $\mathcal{D}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ; donner la nature de f.

526. Dans K^3on donne P d'équation $x + 2y + 3z = 0$ et D d'équation $x = 2y = 3z$.On demande de donner un exemple d'endomorphisme de K^3 f tel que $\ker f = P$ et $\operatorname{Im} f = D$. Matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $K^3 = P \oplus D$? Vérifier la formule du changement de base sur cet exemple.

527. Soit f un endomorphisme de E.

    (a) Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$ équivaut à l'existence de deux sous-espaces supplémentaires F et G et d'un élément f_0 de $GL(F)$ tels que pour tout $\overrightarrow{x}$ de E $\quad f(\overrightarrow{x}) = f_0(\overrightarrow{x}_F)$.

    (b) En déduire que si A est une matrice carrée d'ordre n, $K^n = \operatorname{Im} f_A \oplus \ker f_A$ ssi A est semblable à une matrice formée d'une matrice inversible bordée de zéros à droite et en dessous.

528. Soit M une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$.

    (a) Montrer que si M est inversible à coefficients tous non nuls, alors M^{-1} ne peut avoir plus de $n^2 - 2n$ coefficients nul (raisonner par contraposée).

    (b) Donner un exemple de matrice dont tous les coefficients sont non nuls et dont l'inverse a $n^2 - 2n$ coefficients nuls.
    COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

529. Soit p un projecteur de E, et F un sev de E ; montrer que

$$p(F) = (F + \ker p) \cap \operatorname{Im} p$$
$$p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) + \ker p$$

530. Soient p et q deux endomorphismes de E ; montrer que p et q sont deux projecteurs associés ssi

$$p + q = id$$
$$\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$$

531. Soit s un endomorphisme de E ; montrer que s est une symétrie ssi $\operatorname{Im}(s - id) \cap \operatorname{Im}(s + id) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$

532. Soient $F_1, F_2, ...F_p$ p sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un même espace vectoriel.
    Montrer que si $\dim F_1 + \dim F_2 + ... + \dim F_p = \dim(F_1 + ... + F_p)$, alors les F_i sont en somme directe.

533. Soient $F_1, F_2, ...F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel.
    Montrer que les F_i sont en somme directe ssi $\forall(\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \in F_1 \times ... \times F_p \quad (\forall i \quad \overrightarrow{x}_i \neq \overrightarrow{0}) \Rightarrow (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p)$ libre.
    EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

534. Résoudre : $(1 + x^2)y' + 4xy = \left(2 + 5x + 6x^2 + x^3\right) e^x$
    $y = \lambda/(x^2 + 1)^2 + e^x(x + 1)$.

535. Résoudre : $x\left(1+x^2\right)y'=\left(1-x^2\right)y$ sur $\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R}$.

536. Résoudre $\left(1-x^4\right)y'=\left(1+x^4\right)y$ sur $]-1,1[$.

537. Résoudre $y'(x)=|y(x)-x|$ sur $\mathbb{R}$.

REP : $y(x)=\lambda e^x+x+1$ avec $\lambda\geqslant 0$, ou $y(x)=\lambda e^{-x}+x-1$ avec $\lambda\leqslant 0$, ou $y(x)=\begin{cases} x+1-e^{x-x_0} & \text{pour } x\leqslant x_0 \\ x-1+e^{x_0-x} & \text{pour } x\geqslant x_0\end{cases}$

538. Un escargot avance à une vitesse V_e sur un élastique rectiligne de longueur L dépendant du temps, élastique attaché en O et placé sur Ox.

(a) Montrer que l'abscisse x de l'escargot est régie par l'équation différentielle :

$$x'=V_e+x\frac{L'}{L}$$

et que la longueur $y=L-x$ restant à parcourir par l'escargot pour atteindre l'extrémité de l'élastique est régie par

$$y'=-V_e+y\frac{L'}{L}$$

(b) On suppose V_e constante >0 et $L=L_0+Vt$ avec V constante >0, $L_0>0$; à l'instant 0 l'escargot est en O. Déterminer y en fonction de t.
REP : $y=L\left(1-\frac{V_e}{V}\ln\left(\frac{L}{L_0}\right)\right)$.

(c) En déduire que l'escargot atteint l'extrémité de l'élastique en un temps fini T à calculer, ainsi que la longueur L_1 de l'élastique à ce moment.
REP : $T=\frac{L_0}{V}\left(e^{\frac{V}{V_e}}-1\right)$, $L_1=L_0e^{\frac{V}{V_e}}$.

(d) AN : $V_e=10\ m/j$, $V=100\ m/j$, $L_0=100\ m.$
REP : ≈60 ans et 2203 km.
REM : on peut remplacer l'escargot par un vaisseau spatial et l'élastique par l'univers en expansion...

539. Résoudre : $y''+2y'+2y=5\cos x$
$y=\lambda e^{-x}\sin(x)+\mu e^{-x}\cos x+2\sin x+\cos x$

540. Résoudre : $y''+y=4x\cos x+5e^{2x}$
$y=\lambda\sin x+\mu\cos x+x\cos x+x^2\sin x+e^{2x}$

541. Résoudre l'équation différentielle non linéaire : $y''y=y'^2$ (on ne cherchera que les solutions qui ne s'annulent jamais).

542. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x'=2x+y-2(\cos t+\sin t)\\ y'=-x+2y+2(\cos t-\sin t)\end{cases}$, (c'est-à dire déterminer tous les couples de fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall t\in\mathbb{R}\begin{cases} x'(t)=2x(t)+y(t)-2(\cos t+\sin t)\\ y'(t)=-x(t)+2y(t)+2(\cos t-\sin t)\end{cases}$) ; indication : déterminer une équation du second ordre vérifiée par x.

Rep : exp(2*t)*(acos(t)+bsin(t))+cos(t) , exp(2*t)*(-asin(t)+bcos(t))+sin(t)

543. On donne l'équation : $mx''(t)=mg-kx'(t)$, $m,g,k>0$.

(a) Interpréter physiquement.

(b) Résoudre l'équation sans second membre

i. En considérant l'équation comme du premier ordre en x'.

ii. En utilisant le cours sur les équations du second ordre.

(c) Déterminer la solution vérifiant $x(0)=x'(0)=0$.

(d) Interpréter les résultats.

DÉTERMINANTS

544. Montrer que ce taquin $\boxed{\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & /// \end{array}}$ est impossible à reconstituer.

Facultatif : montrer que celui-ci est possible : $\boxed{\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & /// \end{array}}$.

545. Probabilité d'un cycle de longueur $k > n/2$.

(a) Montrer qu'une permutation de S_n ne peut posséder plus d'un cycle d'ordre $k > n/2$.

(b) Déterminer la probabilité qu'une permutation de S_n possède un cycle d'ordre $k > n/2$.

546. Soit $\sigma =< x_1, ..., x_n >$ un cycle de longueur n, et m un entier naturel non nul.

(a) A quelle CNS σ^m est-il un cycle ?

(b) Dans le cas où ce n'est pas un cycle, combien d'orbites σ^m possède-t-il ?

547. Factoriser $\begin{vmatrix} 2b & b-c-a & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

548. Factoriser $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

549. Soient C_1, C_2, C_3 trois colonnes à 3 coordonnées chacunes ; exprimer $\det(C_1+C_2, C_2+C_3, C_3+C_1)$ en fonction de $\det(C_1, C_2, C_3)$; appliquer à $\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$.

550. Soient $C_1, C_2, ..C_n$ n colonnes à n coordonnées chacunes ; simplifier $\det(C_1+C_2, C_2+C_3, ..., C_{n-1}+C_n, C_n+C_1)$.

551. Soit f un endomorphisme de matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; déterminer à l'aide d'un déterminant les valeurs de λ telles qu'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{x}$ vérifiant $f(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$ (ne pas développer le déterminant, le factoriser à l'aide de combinaisons) ; déterminer l'un des vecteurs $\overrightarrow{x}$ pour chaque valeur de λ obtenue.

552. Factoriser $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & ... & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & ... & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_3 \\ ... & ... & ... & & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \end{vmatrix}$.

REP : $a_1(a_2-a_1)...(a_n-a_{n-1})$.

553. :

(a) Soit $\sigma \in S_n$; montrer que si n est impair et $\sigma(i) \neq i$ pour tout i, alors σ est différente de son inverse.

(b) Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre impair à coefficients entiers dont les éléments diagonaux sont pairs ; montrer que son déterminant est un nombre pair.

554. Montrer que le déterminant d'une matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1 est un entier multiple de 2^{n-1}.

Indication : faire des combinaisons de colonnes.

555. Soit U la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $U(i,j) = 1$ si i divise j, 0 sinon, et soit $A = {}^tUU$; déterminer $A(i,j)$ et calculer le déterminant de A.

556. :

   (a) Déterminer la matrice canonique, la trace et le déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(K)$ qui à toute matrice fait correspondre sa transposée.
   (b) Quels sont la trace et le déterminant d'une symétrie d'un espace vectoriel de dimension n ?
   (c) Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$ qui à toute matrice fait correspondre sa transposée.

557. Montrer que
$$(\exists A \in \mathcal{A}_n(K) \quad \det A \neq 0) \Leftrightarrow n \text{ est pair}$$

558. Soient A,B, C trois matrices carrées d'ordre n.

   (a) Montrer que $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \det C$
   (b) Montrer que $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$
   (c) Montrer que $\det \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$

559. Quel est le déterminant de la comatrice d'une matrice A d'ordre $n \geq 2$?
ESPACES EUCLIDIENS

560. Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e_p})$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$, $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (\overrightarrow{x}|e_k)^2$; montrer que cette famille est une base orthonormée de E.

561. Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e_p})$ une famille libre de vecteurs de E telle que pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$, $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{p} (\overrightarrow{x}|e_k)^2$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice (on considérera l'orthogonal de $vect(\mathcal{B})$).
   Soit i entre 1 et p.
   (b) Montrer que $\|\overrightarrow{e_i}\| \leqslant 1$ ($\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_i}$)
   (c) Montrer que $\|\overrightarrow{e_i}\| \geqslant 1$ (on considérera un vecteur non nul de l'orthogonal de $B\backslash(\overrightarrow{e_i})$, après avoir justifié son existence)
   (d) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

562. Soit f une fonction positive continue, non nulle sur $[a,b]$, $a < b$; on pose $I_n = \int_a^b f^n$; montrer que pour $n \geqslant 1$, $I_n \leqslant \sqrt{I_{n-1}I_{n+1}}$; déterminer le cas d'égalité ; que dire de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$?

563. L'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_0^1 fg$.
Pour toute fonction f de E, on désigne par (f_n) la suite de fonctions définies par $\begin{cases} f_n(x) = nxf(x) \text{ pour } 0 \leqslant x < 1/n \\ f_n(x) = f(x) \text{ pour } 1/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$
(faire une figure).

   (a) Vérifier que f_n appartient bien à E pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) Montrer que si f est orthogonale à f_n pour tout $n \geqslant 1$ alors f est nulle.
   (c) Soit $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$; montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
   (d) Quelle propriété des orthogonaux, vraie dans un espace euclidien, n'est donc pas vraie ici ?

564. Soient $x_1, ..x_n$ n réels distincts ; on considère l'application φ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(P) = (P(x_1), ..., P(x_n))$

   (a) Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) On définit une application de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ par $(P \mid Q) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, Q(x_k)$; vérifier que cette application est un produit scalaire (on pourra utliser φ).

(c) Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire (penser aux polynômes de Lagrange).

565. Soit s un endomorphisme de E ev euclidien ; montrer que s est une symétrie orthogonale ssi $\mathrm{Im}\,(s - id) \perp \mathrm{Im}\,(s + id)$.

566. Soit A une matrice orthogonale d'ordre n.

(a) Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. (indication, considérer la colonne Attila C puis $(AC|C)$).

(b) Montrer que la somme des valeurs absolue des coefficients est comprise entre n et $n\sqrt{n}$.

567. L'espace vectoriel euclidien E_4 est rapporté à la base $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l}\right)$ orthonormée. Soit F le sous-espace vectoriel de E_4 d'équation $\begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases}$.

(a) Déterminer une base B_1 orthogonale de F et une base B_2 orthogonale de $G = F^{\perp}$.

(b) On oriente F et G de sorte que B_1 et B_2 sont directes ; déterminer la matrice dans $B_1 \cup B_2$ puis dans B de l'isométrie f de E_4 dont les restrictions à F et G sont des rotations d'angle $\pi/2$.

568. Compléter la matrice $\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & . \\ -8 & 4 & . \\ 4 & . & . \end{bmatrix}$ de sorte à obtenir une matrice orthogonale directe (resp indirecte) et étudier les isométries correspondantes.

569. Soit f l'endomorphisme de E_4 espace vectoriel euclidien de matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ dans la base $B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l}\right)$ orthonormée.

(a) Vérifier que A est orthogonale et déterminer A^2.

(b) Déterminer les caractéristiques géométriques de f.

570. Déterminer les valeurs possibles de a et b pour que la matrice $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$ soit orthogonale ; étudier les isométries correspondantes.

571. Compléter la matrice $A = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & & & \\ 2 & & & \\ 4 & & & \end{bmatrix}$ avec des entiers égaux à $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ de sorte à obtenir une matrice orthogonale. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants et celui des vecteurs anti-invariants de l'endomorphisme associé.

Rep : $A = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

572. $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$; $A = \begin{bmatrix} a & -b & .. & .. \\ b & a & .. & .. \\ c & -d & a & .. \\ d & c & .. & a \end{bmatrix}$; remplacer les .... de sorte que $\dfrac{A}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$ soit orthogonale. Déterminer alors l'inverse et le déterminant de A.

SERIES

573. : Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2}{n^2 - 1}\right)$; calculer sa somme en commençant à $n = 2$.

574. :

(a) Déterminer tous les polynômes P tels que la *suite* de terme général $u_n = n - \sqrt{P(n)}$ soit de limite nulle.

(b) Déterminer tous les polynômes P tels que la *série* de terme général $u_n = n - \sqrt{P(n)}$ soit convergente.

(c) Idem avec $u_n = n^2 - \sqrt{P(n)}$.

575. :

(a) Où se trouve l'erreur dans le raisonnement suivant ?
On sait que $\Sigma n^2 u_n^2$ est convergente et on veut montrer que Σu_n l'est aussi , sachant $u_n > 0$ pour tout n.
Supposons que $n^2 u_n^2 > \frac{1}{n}$; alors, comme $\Sigma \frac{1}{n}$ est divergente, $\Sigma n^2 u_n^2$ le serait ce qui est absurde.
Donc $n^2 u_n^2 \leqslant \frac{1}{n}$ et par conséquent $u_n \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$, donc Σu_n est convergente.

(b) Montrer la propriété annoncée en utilisant l'inégalite de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

INTÉGRATION

576. On pose $f(t) = t\lfloor t \rfloor - (\lfloor t \rfloor)^2$

(a) Représenter les courbes de f et F où $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(b) Calculer $F(n)$ pour n entier naturel.

577. f est continue sur $\mathbb{R}$ et a et b sont deux réels ;

(a) on pose $g(x) = \int_a^b f(t+x)\,dt$; montrer que g est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

(b) Idem pour $h(x) = \int_0^x f(t+x)\,dt$.

578. f est continue sur $\mathbb{R}$; on pose $g(x) = \int_a^b f(t+x).\sin(t+c)dt$, avec $a \leqslant b, c$ fixés.

(a) Montrer que g est continue en 0 ; on utilisera la continuité uniforme de f sur $[a-1, b+1]$.

(b) Montrer en se ramenant au a) que g est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Calculer $g(x)$ pour $f(x) = \sin x$, $a = 0, b = \pi, c = 0$.

579. Exercice utilisant les intégrales.
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b], a < b$;

(a) Montrer que si $\forall x \in [a, b] \;\; f'(x) \geqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, alors $\forall x \in [a, b] \;\; f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ (et f est donc affine sur $[a, b]$).

(b) On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont $> \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ et que f est deux fois dérivable sur $]a, b[$; montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = 0$ (figure).
Indication : commencer par le cas $f(a) = f(b)$.

580. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, $M = \max\limits_{[a,b]} |f'|$.

(a) Montrer que si $f(a) = 0$, alors $\left| \int_a^b f \right| \leqslant M \dfrac{(b-a)^2}{2}$, avec égalité ssi f est affine sur $[a, b]$.

(b) Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, alors $\left|\int_a^b f\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{4}$, avec égalité ssi f est nulle sur $[a,b]$.

Indication : couper l'intervalle en 2.

(c) Vérifier l'inégalité du b) pour $f(x) = (x-a)(x-b)$.

581. Soit f une fonction CM croissante sur $\mathbb{R}_+$; on pose, pour $x > 0$, $F(x) = \frac{\int_0^x f}{x}$; montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

(a) En supposant f continue sur $\mathbb{R}_+$

(b) Sans supposer f continue sur $\mathbb{R}_+$

582. Soit f une fonction dérivable injective de dérivée jamais nulle sur un intervalle I et f^{-1} sa fonction réciproque définie sur $J = f(I)$, F une primitive de f; montrer qu'une primitive de f^{-1} est la fonction G définie par $xf^{-1}(x) - F\left(f^{-1}(x)\right)$. Appliquer au calcul de primitives de ln, d'arcsin et d' arctan et comparer avec leur calcul habituel.

583. Soit f une fonction dérivable injective sur un intervalle $[a,b]$ et f^{-1} sa fonction réciproque ; calculer $\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$; interpréter géométriquement.

584. : Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$; on se propose de démontrer que cette fonction, bien que discontinue en 0, possède une primitive sur $\mathbb{R}$.

(a) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$; montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de sa dérivée, sur $\mathbb{R}^*$ et en 0.

(b) Démontrer ce qui a été annoncé.

585. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,\pi]$, telles que $f'(x) = \sin(f(x))$. Tracer la courbe de la solution f vérifiant $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$2\arctan ke^x$.

586. $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sqrt[n]{a^k b^{n-k}}$ ($a,b > 0$) ; déterminer $\lim u_n$.

587. $u_n = \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^{n}\frac{ka+(n-k)b}{n}}$ ($a,b > 0$) ; déterminer $\lim u_n$.

REP : $\frac{1}{e}\sqrt[b-a]{\frac{b^b}{a^a}}$.

PROBAS 2

588. On tire au hasard un nombre entre 1 et n et on considère les 3 évènements A : tirer 1 ou 2, B : tirer 2 ou 3, C : tirer 3 ou 1.

Montrer qu'il n'existe aucune valeur de n pour lesquelles ces 3 évènements sont mutuellement indépendants, mais une pour laquelle ils sont 2 à 2 indépendants.

589. Étant donnés un entier $n \geqslant 2$ et un entier k de $[1, n-2]$ fixés, on considère pour tout réel x de $[0,1]$ une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(n,x)$, et l'on pose $f_{n,k}(x) = P(X = k)$.

1) Dresser le tableau de variations de $f_{n,k}$ sur $[0,1]$ et donner l'allure de la courbe. Que se passe-t-il pour celle-ci si l'on change k en $n-k$? Dans quels cas cette courbe possède-t-elle un axe de symétrie ?

2) Soit $x_{n,k}$ l'abscisse du maximum de $f_{n,k}$ sur $[0,1]$; on demande la valeur de $p_k = \lim_{n\to+\infty} f_{n,k}(x_k)$, puis un équivalent de p_k lorsque k tend vers l'infini.

3) On pose $I_{n,k} = \int_0^1 f_{n,k}(x)\,dx$; démontrer que $I_{n,k} = \frac{1}{n+1}$.