

## INÉGALITES

1. Montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} k! \leq n!$ .

2. Pour quelles valeurs de  $a > 1$  a-t-on  $\sum_{k=0}^{n-1} a^k \leq a^n$  pour tout entier  $n \geq 1$  ?

En déduire que le nombre des ancêtres de la  $n$ -ième génération au dessus de la nôtre est supérieur à la totalité de nos ancêtres jusqu'à la  $n - 1$ ième.

3. :

(a) Montrer que si  $x, y > 0$ , alors  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

(b) En déduire que si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont  $n$  réels strictement positifs,  $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$ .

4. :

(a) Montrer que si  $x > 0$ , alors  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

(b) En déduire que si  $a > 0$ , alors la moyenne arithmétique des réels  $1, a, a^2, a^3, \dots, a^{2n}$  est  $\geq a^n$ .

5. Montrer que pour tout réel  $x$  et tout entier  $q > 0$  il existe un entier  $p$  tel que  $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$ . Exemple :  $x = \pi$  et  $q = 7$ .

6. Démontrer par disjonction de cas que pour tout réel  $x$ ,  $x < x^2 + 1/2$  ; le redémontrer en utilisant un trinôme.

7. Quel est le plus petit réel  $a$  tel que pour tout réel  $x$  on ait  $x \leq x^2 + a$  ?

8. Etudier et dessiner la partie du plan définie par  $2 \leq ||x| + |y| - 3| \leq 4$ .

## LOGIQUE

9. Le théorème de Pythagore énonce que si un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

On donne à un élève un triangle de côtés 6, 7 et 8 : il conclut qu'il n'est pas rectangle car  $64 \neq 61 = 49 + 36$ .

A-t-il utilisé le théorème de Pythagore ou bien sa réciproque ?

10. Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$ . Exprimer en langage formalisé l'énoncé : la fonction  $f$  garde un signe constant sur  $I$ . En donner la négation.

11.  $P$  : Il y a toujours un médecin de garde

$Q$  : Il y a un médecin toujours de garde

Soit  $M$  l'ensemble des médecins et  $G(t)$  l'ensemble des médecins de garde à l'instant  $t$ .

Ecrire  $P$  et  $Q$  en langage formalisé.

12. Déterminer la valeur de vérité des énoncés suivants (avec justification)

(a)  $\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad / \quad x^3 - mx + 1 = 0$ .

(b)  $\exists x \in \mathbb{R} \quad / \quad \forall m \in \mathbb{R} \quad x^3 - mx + 1 = 0$ .

(c)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad / \quad x^3 - mx + 1 = 0$ .

13. Soit  $f$  la fonction carré ; vrai ou faux ?

(a)  $\exists x \in \mathbb{R} \quad / \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)$

(b)  $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad / \quad f(x+y) = f(x)$  (illustrer)

14. Vrai ou faux ?

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \implies x > 2$

(b)  $\exists x \in \mathbb{R} / x > 1 \implies x > 2$

15. Déterminer  $\{x \in \mathbb{R} / x > 1 \Leftrightarrow x > 2\}$  et  $\{x \in \mathbb{R} / x > 1 \Leftrightarrow x \leq 2\}$ .

16. On considère les énoncés  $P$  et  $Q$  concernant une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$P : \forall a \geq 0 \exists m \geq 0 \forall x \in [-a, a] |f(x)| \leq m$$

$$Q : \exists m \geq 0 \forall a \geq 0 \forall x \in [-a, a] |f(x)| \leq m$$

Donner un exemple de  $f$  ne vérifiant pas  $P$  et un exemple de  $f$  vérifiant  $P$  mais pas  $Q$ .

17. Sachant que  $\sqrt{6}$  est irrationnel, montrer que  $\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$  est irrationnel.

18. Rationnels ou irrationnels ?

(a)  $\sqrt{8 + \sqrt{63}} + \sqrt{8 - \sqrt{63}}$

(b)  $\sqrt{7 + \sqrt{48}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}}$

19. Montrer que si  $a, a', b, b'$  sont 4 rationnels,  $b$  et  $b' \geq 0$ , vérifiant  $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$  avec  $\sqrt{b}$  irrationnel, alors  $a = a'$  et  $b = b'$ .

20. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  ; montrer qu'il existe un unique couple de fonctions  $(g, h)$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $f = g + h$ , avec  $g$  symétrique et  $h$  antisymétrique ( $g(x, y) = g(y, x)$  et  $h(x, y) = -h(y, x)$ ).

21. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $T > 0$  ; montrer qu'il existe un unique couple d'applications  $(g, h)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $f = g + h$  avec  $g$   $T$ -périodique et  $h$  nulle sur  $[0, T[$ .

TRIGO

22. : Calculer  $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{18}} - \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{18}}$ .

Rep 4.

23.  $a + b + c = \frac{\pi}{2}$  ; calculer  $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a$ .

24. :  $P = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$

(a) Calculer  $P \sin \frac{\pi}{7}$ , en déduire  $P$ .

(b) Montrer par linéarisation que  $4P = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - 1$

(c) En déduire une équation du troisième degré dont  $2\cos \frac{\pi}{7}$  est solution.

Rep :  $P = -1/8$ .

25.  $S = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

(a) Linéariser  $S \sin \frac{\pi}{7}$ , en déduire  $S$ .

(b) Vérifier que  $S = \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7}$ .

(c) En déduire une équation du troisième degré dont  $2\cos \frac{\pi}{7}$  est solution.

Rep :  $S = -1/2$ .

26. Montrer que  $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9}$  ; en déduire une équation du troisième degré dont  $2\cos \frac{\pi}{9}$  est solution.

27. Montrer que  $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9}$  ; en déduire par linéarisation la valeur de  $P = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$ .

28. Montrer que  $\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9}$  ; en déduire par linéarisation la valeur de  $P = \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9}$ .

29. Soient  $a, b, c$  3 réels ; à l'aide du trinôme du second degré  $P(x) = x^2 + 2(\cos a \cos b)x + \cos^2 a + \cos^2 b - 1$ , déterminer une factorisation (la plus poussée possible) de l'expression  $E = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c - 1$ .

30. :

- (a) Calculer  $\cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16}$ .  
 (b) Généraliser cette formule.

31. :

- (a) Vérifier que si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $2 \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$ .  
 (b) En déduire la valeur de  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$  ( $n$  radicaux).

Rep :  $2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ .

32. On pose  $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$  ;

- (a) Montrer que  $f(x) \geq 1$  pour tout  $x$ .  
 (b) Réduire l'intervalle d'étude et étudier  $f$  ; tracer la courbe.

33. Un segment de longueur constante est tel que ses extrémité  $A$  et  $B$  coulissent sur deux axes perpendiculaires en  $C$ . Pour quelle(s) position(s) du segment  $[AB]$  le triangle  $ABC$  a-t-il un périmètre (resp une aire) maximal(e) (resp minimal(e))?

34. Un point  $C$  décrit un cercle de diamètre  $[AB]$  ;  $I$  est le milieu de  $[AC]$ . Quel est le maximum de l'angle  $ABI$  ?

Rep :  $\arcsin 1/3$ .

#### RÉCURRENCES

35. Démontrer par récurrence sur  $n$  que tout entier  $n \geq 8$  peut s'écrire sous la forme  $3a + 5b$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels.

36. Démontrer par récurrence forte que tout entier  $\geq 2$  est décomposable en produit de facteurs premiers.

37. Démontrer par récurrence forte que tout entier naturel non nul est somme de puissances de 2 distinctes ( $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists K \subset \mathbb{N} / n = \sum_{k \in K} 2^k$ ).

38. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$  et toute famille de  $n$  réels strictement positifs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$ .

39. Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $2!4!\dots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$ .

40. Démontrer que pour tous entiers naturels  $a$  et  $b$ ,  $(ab)!$  est divisible par  $a^b$  et  $b^a$ .

41. Démontrer que  $\frac{(4n)!}{n!}$  est divisible par  $24^n$  ; trouver de même un diviseur de  $\frac{(5n)!}{n!}$ .

42. Montrer que  $\frac{(n!)^n}{1!2!\dots(n-1)!} = 1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot n^n$

- (a) Par récurrence sur  $n$ .  
 (b) Directement.

43. On définit une suite par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n(4 - u_n)/4$  ; calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

44. Montrer que pour tout entier  $n$  et tout entier  $q$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_{k+q} = F_{2n+q}$ .

45. Montrer que  $2^{4^n} - 2$  est divisible par 7, pour tout naturel  $n$ .

46. Montrer par récurrence sur  $n$  que l'on peut toujours séparer tous les timbres d'une planche rectangulaire de  $n$  timbres sur  $m$  timbres en  $nm - 1$  déchirures.

47. Où se trouve l'erreur dans le raisonnement par récurrence forte suivant ?

Soit  $a$  un réel ; montrons que  $a^n = 1$  pour tout naturel  $n$ . C'est vrai pour  $n = 0$  H.R. : pour tout entier  $k$  de 0 à  $n$ , on a  $a^k = 1$  Alors  $a^{n+1} = \frac{a^n a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$ , ce qui achève la récurrence forte.

48. On définit la suite de Fibonacci par  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . On aimerait trouver un minorant de  $F_n$  pour  $n \geq 1$  de la forme  $a.b^n$ , avec  $a$  et  $b > 0$ .

(a) Déterminer la plus grande valeur de  $b$  de sorte que dans la démonstration par récurrence double de  $F_n \geq a.b^n$ , la démonstration de l'hérédité reste valable ; on trouvera  $b = \varphi$ .

(b) Trouver alors la meilleure valeur de  $a$  telle que l'initialisation (pour  $n = 1$  et 2) soit valable.

(c) Trouver de même une majoration de  $F_n$ .

REP :  $\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^{n-1}$

49. (suite de Sylvester)

Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_1 = 2$  et  $u_{n+1} = u_1 \dots u_n + 1$ ; montrer que pour tout  $n \geq 1, 2^{2^{n-2}} \leq u_n \leq 2^{2^{n-1}}$ .

50. Soit  $p_n$  le  $n$ -ième nombre premier.

(a) Montrer (sans récurrence) que  $p_{n+1} \leq p_1 \dots p_n + 1$ .

(b) Montrer (par récurrence forte) que  $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ .

### TRIGO RÉCIPROQUE

51. Calculer  $\cos(\arctan x), \cos(2 \arctan x), \cos(1/2 \cdot \arctan x)$  sans faire intervenir de fonction trigonométrique.

52.  $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ .

Simplifier  $f(x)$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  [et tracer la courbe de  $f$  sur  $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ .

53. :

(a) Montrer que  $\arccos(\cos x) = \left| x - 2\pi \cdot \text{arrondi} \left( \frac{x}{2\pi} \right) \right|$  ( $\text{arrondi}(x)$  est l'entier le plus proche de  $x$ )

(b) Trouver une formule similaire pour  $\arctan(\tan x)$ .

54. On suppose connu que  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \sin x \leq x \leq \tan x$  ; en déduire que

(a)  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \sin x \leq x$  et  $\forall y \in [0, 1[ \ y \leq \arcsin y \leq \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ .

(b)  $\forall x \in [0, 1[ \ x \leq \tan x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $\forall y \in [0, 1[ \ \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \leq \arctan y \leq y$ .

55. On pose  $f(x) = \sin x + x$  ; montrer que  $f$  possède une fonction réciproque définie sur  $\mathbb{R}$  ; tracer les courbes de  $f$  et  $f^{-1}$ ;

déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$ ; calculer  $(f^{-1})'(0)$  et  $(f^{-1})'\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$ .

### 56. SOMMES ET PRODUITS

57. Simplifier  $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) b_k + \sum_{k=1}^n a_k (b_{k+1} - b_k)$  et  $\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) b_k + \sum_{k=0}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k)$  (formules de "somme par parties").

58. Démontrer que  $\prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=n+1}^{2n} k$ .

59. Calculer  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ .

Rep :  $\frac{(n+1)^n}{n!}$ .

60. :

(a) Calculer  $T_n = \sum_{i=0}^n i2^i$  en calculant  $2T_n$ .

(b) Déterminer  $S_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{\min(i,j)}$ .

Rep :  $T_n = (n-1)2^{n+1} + 2$

Rep :  $S_n = 6 \cdot 2^n - 2n - 5$ .

Variante :  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 2^{\max(i,j)} = (2n-1)2^{n+1} + 3$ .

61.  $f(p, q) = \sum_{k=0}^n k^p (n-k)^q$  ; montrer que  $f(p, q) = f(q, p)$ , simplifier  $f(p+1, q) + f(p, q+1)$ , et calculer  $f(p, q)$  pour  $0 \leq p, q \leq 2$ .

62. Calculer  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$  et déterminer sa limite quand  $n$  tend vers l'infini.

Rep :  $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

63. Montrer qu'il existe  $a, b, c, d$  indépendants de  $k$  tels que  $\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{a}{k^2 + bk + 1} + \frac{c}{k^2 + dk + 1}$ ; en déduire une expression sans somme de  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$ .

FORMULE ET COEFFICIENTS DU BINÔME

64. Pour  $n$  entier impair,  $n = 2p + 1$ , on pose  $f(a, b) = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ,  $g(a, b) = \sum_{k=p+1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(a) Montrer que  $g(a, b) = f(b, a)$  à l'aide d'un changement d'indice.

(b) En déduire que  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} a^k b^k (a^{n-2k} + b^{n-2k})$ .

(c) Formule similaire pour  $n$  pair ?

65. Calculer  $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$  de deux façons différentes.

Rep :  $2^{n+1} - 1$ .

66. Calculer  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i}$  (intervertir les deux signes de sommation).

Rep :  $3^n$ .

Variante :  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} x^i y^{j-i} = (1+x+y)^n$

67. Calculer  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{i+j}{i}$ .

Rep :  $\binom{2n+2}{n+1} - 1$ .

68. Montrer que  $P = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}$  est égal à  $2^{3-n} \cdot 3^{5-n} \cdot 4^{7-n} \dots n^{n-1}$ .

FORMULE DE BERNOULLI

69.  $f(x) = x^n$  avec  $n$  entier  $\geq 1$  : calculer la dérivée de  $f$  en utilisant la formule de Bernoulli.

70. Soient trois entiers naturels non nuls  $m, n, a$  avec  $m \geq n$

- (a) Montrer que  $m^a - n^a \geq (m - n)a$ .  
 (b) Montrer que si  $m^a = n^a + a$ , alors  $a = 1$ .

LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

71. Tracer les courbes des fonctions  $f$  définies par  $f(x) = a^{\ln(x)}$  suivant les diverses valeurs de  $a$ .

72.  $M$  étant le point courant de coordonnées  $(x, \ln x)$  de la courbe de la fonction  $\ln$ , étudier les variations de la pente de la droite  $(OM)$  en fonction de  $x$ .

73.  $M$  étant le point courant de coordonnées  $(x, e^x)$  de la courbe de la fonction  $\exp$ , étudier les variations de la pente de la droite  $(OM)$  en fonction de  $x$ .

74. En physique on définit l'ordre de grandeur  $f(x)$  d'un réel positif  $x$  non nul comme la plus grande puissance de 10 inférieure ou égale à  $x$  ; par exemple  $f(1732) = 10^3$  (attention "puissance de 10" signifie ici : le nombre 10 élevé à une puissance entière, pouvant être négative).

- (a) Donner une formule pour  $f(x)$  en utilisant la fonction partie entière.  
 (b) Donner un exemple où  $f(x_1 x_2)$  est différent de  $f(x_1) f(x_2)$  mais montrer que cette formule est exacte si  $x_2$  est une puissance de 10.

75. On pose  $f(x) = e^x + ke^{-x}$ .

Montrer que pour  $k$  non nul,  $C_f$  possède toujours un axe ou un centre de symétrie.

76. On pose  $f(x) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \frac{\pi}{6}\right)$  ; montrer que  $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

77. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$ .

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

78. :

(a) Simplifier  $\operatorname{sh}x \operatorname{ch}x \operatorname{ch}2x \operatorname{ch}4x \dots \operatorname{ch}2^n x$ .

(b) On pose  $f_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$  ; déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  pour  $x \neq 0$ , puis pour  $x = 0$ .

(c) Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

79. Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$ .

Rep :  $2^n \operatorname{ch} n \frac{x}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{x}{2}\right)^n$ .

SYSTEMES LINEAIRES

80. Résoudre et discuter le système de paramètre  $m$  : 
$$\begin{cases} x - y + 2mz = 2m \\ x - my + 2z = 3 - m \\ mx - y + 2z = m + 1 \end{cases}$$

Rep :  $m = 1$  :  $x - y + 2z = 2$  ;  $m = -2$  :  $x = -1 + 2z, y = 3 - 2z$  ; sinon :  $x = y = z = 1$ .

81. Résoudre et discuter le système de paramètres  $a, b, c$  : 
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$
 On n'étudiera complètement que les cas

$a = b, b \neq c$  et  $a, b, c$  distincts.

82. Résoudre et discuter le système de paramètres  $a, b, c, d$  : 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$
 On n'étudiera complètement que les cas  $a = b, b \neq c$  et  $a, b, c$  distincts.

## ENSEMBLES

83. On a dans les réels :  $x - (y + z) = (x - y) - z$  et  $x - (y - z) = (x - y) + z$   
Pouvez-vous trouver, et démontrer, des formules similaires dans les ensembles ?
84.  $E, G, F$  étant 4 ensembles, montrer :

- (a)  $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$   
(b)  $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

85. On se donne une famille finie d'ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , indexée par  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , vérifiant  $\forall i, j \in I \exists k \in I / E_i \cup E_j \subset E_k$ ; montrer par récurrence sur  $n$  que  $\exists k \in I / \forall i \in I E_i \subset E_k$ . Montrer que ce résultat peut être faux pour une famille infinie d'ensembles.
86. Soient  $X, Y, Z$  3 parties d'un ensemble  $E$ ; montrer que

$$(X \cap Y = X \cap Z) \Leftrightarrow (X \cap \bar{Y} = X \cap \bar{Z})$$

87. Soient  $X, Y, Z$  3 ensembles.

- (a) Montrer que  $(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ ; on note cet ensemble  $X \triangle Y$ .  
(b) Montrer que  $Z \triangle X = Z \triangle Y \Rightarrow X = Y$ .

88.  $E$  est un ensemble,  $A$  et  $B$  en sont des parties.

- (a) Montrer que si  $A \cup B = E$  alors pour toutes parties  $X$  et  $Y$  de  $E$ , 
$$\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases} \Rightarrow X = Y$$
  
(b) Etudier la réciproque de a.  
(c) Montrer que si  $A \cap B = \emptyset$  alors étant données une partie  $X_1$  de  $A$  et une partie  $X_2$  de  $B$ , il existe une partie  $X$  de  $E$  telle que 
$$\begin{cases} X \cap A = X_1 \\ X \cap B = X_2 \end{cases}$$
.  
(d) Etudier la réciproque de c.

## DÉNOMBREMENTS

89. Dénombrer les grilles de mots croisés  $n \times n$  ayant exactement une case noire dans chaque ligne et dans chaque colonne.
90. Dénombrer les couples  $(A, B)$  formés de parties d'un ensemble  $E$  ayant  $n$  éléments dont l'intersection est réduite à un élément.
91. On tire au hasard et successivement deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$  ayant  $n$  éléments; quelle est la probabilité que ces deux parties
- (a) soient disjointes  
(b) soient de réunion égale à  $E$   
(c) soient incluses l'une dans l'autre ?

92. Quel est la moyenne du nombre d'éléments d'une partie de  $E$ , ensemble ayant  $n$  éléments ? Quel est son écart-type ?  
Rappel : l'écart-type est la racine carrée de la variance et la variance est la moyenne du carré moins le carré de la moyenne.

réponse :  $n/2$  et  $\sqrt{n}/2$

## RELATIONS

93. On définit dans l'ensemble des fonctions réelles définies sur  $[0, +\infty[$  les relations  $R$  et  $S$  :

$$f R g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x > A \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

et

$$f S g \Leftrightarrow \exists A > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x > A \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

- (a) Vérifier que  $R$  est réflexive, symétrique et transitive (on admettra que  $S$  aussi).  
 (b) Quelle relation implique l'autre ? Donner un exemple de couple  $(f, g)$  vérifiant l'une et pas l'autre.
94. On dit qu'une relation  $R$  dans un ensemble  $E$  est *strictement antisymétrique* si  $\forall x, y \in E \quad xRy \implies y \not R x$ .
- (a) Donner un exemple.  
 (b) Une relation strictement antisymétrique est-elle antisymétrique ?  
 (c) Trouver une condition du type :  $R$  est strictement antisymétrique ssi  $R$  est antisymétrique et .....
95. Une relation antisymétrique est dite maximale si on ne peut pas rajouter de couple dans son graphe sans perdre sa propriété d'antisymétrie ; par exemple, la relation de diagramme

$\nearrow$	$a$	$b$	$c$
$a$	×	×	
$b$		×	×
$c$	×		×

est antisymétrique maximale, tandis que la relation de diagramme

$\nearrow$	$a$	$b$	$c$
$a$	×		
$b$			×
$c$	×		×

est antisymétrique non maximale.

Combien de couples une relation antisymétrique maximale sur un ensemble à  $n$  éléments possède-t-elle dans son graphe ?

Combien existe-t-il de relations antisymétriques maximales dans un ensemble à  $n$  éléments ?

#### RELATIONS D'ORDRE

96. L'ensemble des nombres entiers naturels est muni de la relation de divisibilité ; déterminer l'ensemble des majorants (pour cette relation) de l'ensemble  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ , puis l'ensemble des majorants de l'ensemble  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .
97. Déterminer toutes les relations d'ordre sur un ensemble à 3 éléments. Indiquer celles qui sont totales.
98. On définit dans  $\mathbb{R}$  la relation  $R$  par  $uRv \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / v = u^{2^n}$  ;
- (a)  $R$  est-elle une relation d'ordre ?  
 (b) Même question en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$ .
99. On définit dans  $\mathbb{R}^2$  la relation :  $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow (x > x' \implies y \leq y')$ .  
 Est-ce une relation d'ordre ?
100. On définit dans  $\mathbb{R}^2$  la relation d'ordre lexicographique :  $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < x' \\ \text{ou } x = x' \text{ et } y \leq y' \end{array} \right.$ .
- (a) Est-elle totale ?  
 (b) Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}^2$  possède-t-elle une borne supérieure ?
101. On définit dans l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  des applications de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  la relation  $\leq$  par

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x)$$

- (a) Vérifier que  $\leq$  est bien une relation d'ordre. Est-elle totale ?  
 (b) Soient  $f$  et  $g$  appartenant à  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  ; à quelle condition  $A = \{f, g\}$  possède-t-elle un maximum ?  $A$  possède-t-elle toujours une borne supérieure ?  
 (c) Toute partie non vide majorée de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  possède-t-elle une borne supérieure ?

102. On définit dans l'ensemble des parties non vide de  $\overline{\mathbb{R}}$  la relation  $R$  par :

$$A R B \Leftrightarrow \forall x \in A \quad \forall y \in B \quad x \leq y$$

- (a) Etudier la réflexivité, la transitivité, et l'antisymétrie de  $R$ . Est-ce une relation d'ordre ?  
 (b) On définit maintenant, toujours dans l'ensemble des parties non vide de  $\overline{\mathbb{R}}$  la relation  $S$  par :

$$A S B \Leftrightarrow A R B \text{ ou } A = B$$

On admettra que  $S$  est bien une relation d'ordre : est-elle totale ?

- (c) Vérifier que  $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus \{\emptyset\}$  possède un plus petit élément et un plus grand élément pour  $S$ .

103. Théorème du point fixe pour une fonction croissante

- (a) Soit  $f$  une fonction croissante de  $[0,1]$  dans lui-même ; montrer qu'elle possède un point fixe.  
 Indication : considérer l'ensemble  $A = \{x \in [0,1] / f(x) \leq x\}$  ; montrer qu'il n'est pas vide et considérer sa borne inférieure  $\alpha$  ; vérifier que  $\alpha \in [0,1]$  et montrer que  $f(\alpha) = \alpha$ .  
 (b) Montrer que ce théorème est faux si l'on remplace  $[0,1]$  par  $]0,1[$ .

### GÉOMÉTRIE

104. On se donne 3 réels dont la somme est non nulle et tels que deux d'entre eux n'ont pas la même somme que le troisième ; soit  $A' = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ -\alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ ,  $B' = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$ ,  $C' = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix}$ ,  $G = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$  ; montrer que  $G = \text{bar} \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ -\alpha + \beta + \gamma & \alpha - \beta + \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}$ , que  $G$  est le point d'intersection de  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$ , et que le triangle  $(ABC)$  est inscrit dans les côtés du triangle  $(A'B'C')$ .

105. Donner un exemple de 4 points qui ne sont pas dans un même plan, et le prouver.

106. Valeurs de  $a$  pour que  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  soient coplanaires ?

107. Déterminer  $a$  pour que les droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  soient sécantes, sachant  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $A' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  ; coordonnées du point d'intersection ? Équation du plan les contenant ?

108. Déterminer  $a$  pour que les droites  $D = (AB)$  avec  $A(1,1,1)$  et  $B(0,2,3)$  et  $D' \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ x + y + z = a \end{cases}$  soient sécantes ; déterminer alors leur point d'intersection et l'équation cartésienne du plan les contenant.

109. On donne dans le plan rapporté à un repère orthonormé la droite  $D : y = ax$ .

- (a) Rappeler quelle est la distance d'un point  $M_0(x_0, y_0)$  à la droite  $D$ .  
 (b) Soient  $A(1,1)$  et  $B(2,1)$  ; pour quelles valeurs de  $a$  la droite  $D$  est-elle équidistante de  $A$  et  $B$  ? (tracer)  
 (c) Pour quelles valeurs de  $a$  la somme des carrés des distances de  $A$  et  $B$  à  $D$  est-elle minimale ? (tracer)

110. On donne un hexagone plan  $(AB'CA'BC')$  dont les côtés opposés sont parallèles ; montrer que les triangles  $(ABC)$  et  $(A'B'C')$  ont la même aire.

111. Déterminer l'aire puis la longueur des hauteurs du triangle de sommets  $A(1,2,3)$ ,  $B(2,4,5)$ ,  $C(1,3,5)$ .

112. Exprimer  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})$  sous une forme sans produit vectoriel.

113. Soient  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  3 vecteurs non coplanaires ; résoudre le système d'équation d'inconnues  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  : 
$$\begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{a} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{b} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{c} \end{cases} .$$
114. Soient  $A$  et  $B$  deux point distincts et  $\vec{u}$  un vecteur non nul ; on cherche à déterminer l'ensemble des points  $M$  de l'espace vérifiant  $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{u}$ .
- (a) Montrer qu'il existe un point unique qui est solution, vérifiant  $AM = BM$  ; notons le  $M_0$ .
- (b) Déterminer alors l'ensemble demandé (passer par  $M_0$ ).
115.  $n$  points distincts d'isobarycentre  $G$  sont sur une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  ; montrer que la somme  $S$  des carrés de leurs distances mutuelles est égale à  $n^2 (R^2 - OG^2)$  ; en déduire que si  $d$  est la plus petite distance entre ces points,  $d \leq \sqrt{\frac{2n}{n-1}} R$  et que  $d = \sqrt{\frac{2n}{n-1}} R$  ssi  $O = G$  ; étudier le cas  $n = 4$ .
116. Montrer que, dans l'espace, 3 plans se coupent en un point unique ssi leurs vecteurs normaux sont non coplanaires.
- (a) Démontrer que, dans l'espace, l'ensemble des points équidistants de deux point  $A$  et  $B$  est le plan passant par le milieu de  $A$  et  $B$  et orthogonal à  $(AB)$ .
- (b) Démontrer que par 4 points coplanaires, passe une unique sphère.
117. Trouver la sphère passant par  $A(4, 5, 1), B(2, 5, -5), C(-4, 5, 1), D(4, 3, 3)$  ; montrer qu'il y a sur cette sphère au moins 24 points à coordonnées entières, y compris les précédents.
118. Déterminer les caractéristiques et tracer la courbe d'équation  $x^2 - xy + y^2 = 1$ .
119. Déterminer les caractéristiques et tracer la courbe d'équation  $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ .
120. Déterminer les caractéristiques et tracer la courbe d'équation  $x^2 - xy + y^2 = x + y$ .
121. On donne dans le plan une droite  $D$  et un point  $F$  à distance  $a$  de  $D$  ; le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur  $D$  est noté  $H$  ; on désigne par  $\Gamma$  le lieu des points  $M$  vérifiant  $MF + MH = d$ .
- (a) Montrer que si  $d < a$ ,  $\Gamma$  est vide. Etudier le cas  $d = a$ .
- (b) si  $d > a$ , déterminer l'intersection de  $\Gamma$  avec le demi-plan limité par  $D$  situé du côté de  $F$  ; on pourra considérer la droite de ce demi-plan située à distance  $d$  de  $D$ .
- (c) Déterminer l'autre intersection.

## APPLICATIONS

122. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x + y, x - y)$  et soient  $a, b, a', b'$  4 réels vérifiant  $a < b, c < d$ .
- (a) Démontrer que  $C = f^{-1}([a, b] \times [c, d])$  est un carré plein dont on donnera les coordonnées des sommets.
- (b) Déterminer le plus petit carré du type  $[a', b'] \times [c', d']$  contenant  $C$ .
123. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x + y, x - y)$  et soient  $a, b, a', b'$  4 réels vérifiant  $a < b, c < d$ .
- (a) Démontrer que  $C = f([a, b] \times [c, d])$  est un carré plein dont on donnera les coordonnées des sommets.
- (b) Déterminer le plus petit carré du type  $[a', b'] \times [c', d']$  contenant  $C$ .
124. On considère une application  $f$  de  $E$  dans  $E$  vérifiant  $f^2 (= f \circ f) = f$ .
- (a) Montrer que si  $f$  est injective ou surjective alors  $f = id_E$ .
- (b) Donner un exemple avec  $E = \mathbb{R}^2$  autre que l'identité.
125. On considère une application  $f$  de  $E$  dans  $E$  vérifiant  $f^3 (= f \circ f \circ f) = f$ .
- (a) Montrer que si  $f$  est injective ou surjective alors  $f^2 = id_E$ .
- (b) Donner un exemple avec  $E = \mathbb{R}^3$  de telle  $f$  ne vérifiant ni  $f^2 = f$  ni  $f^2 = id_E$ .

126. On considère une application  $f$  de  $E$  dans  $E$  vérifiant  $f^3 (= f \circ f \circ f) = id_E$ .

- (a) Montrer que  $f$  est bijective en utilisant la méthode "deus ex machina".  
 (b) Déterminer toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définies par une expression du type  $f(z) = az + b$  vérifiant  $f^3 = id_E$ .

Les interpréter géométriquement.

127. Soit  $f$  une application de  $X$  vers  $Y$ . On note  $F$  l'application de  $P(X)$  vers  $P(Y)$  qui à toute partie  $A$  de  $X$  fait correspondre  $f(A)$ , et  $G$  l'application de  $P(Y)$  vers  $P(X)$  qui à toute partie  $B$  de  $Y$  fait correspondre  $f^{-1}(B)$ .

- (a) Montrer  $f$  injective ssi  $F$  injective ssi  $G$  surjective.  
 (b) Montrer  $f$  surjective ssi  $F$  surjective ssi  $G$  injective.

128. Soit  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z - x \end{pmatrix}$

(a) Déterminer  $f^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  :  $f$  est-elle injective ?

(b) Déterminer  $f(\mathbb{R}^3)$  :  $f$  est-elle surjective ?

129. Donner un exemple d'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $f(\mathbb{R}^2)$  et  $f^{-1}(0)$  soient égaux tous les deux à la droite d'équation  $y = x$  ;  $f$  est-elle surjective? Injective ?

130. Soit  $S$  la sphère de  $\mathbb{R}^3$  de centre  $(0, 0, 0)$  et de rayon 1 et  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $S$  qui à  $(\theta, \lambda)$  fait correspondre  $(\cos \theta \cos \lambda, \sin \theta \cos \lambda, \sin \lambda)$ .

(a) Vérifier que  $f(\theta + \pi, \pi - \lambda) = f(\theta, \lambda)$ .

(b) Montrer que les restrictions de  $f$  à  $[-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$  sont surjectives.

(c) Déterminer une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que la restriction de  $f$  à  $A$  soit bijective.

131. Soit  $f$  définie de  $E = ]0, +\infty[$  dans lui-même par  $f(x, y) = \left( (xy)^\alpha, \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \right)$  ; déterminer  $\alpha$  pour que  $f \circ f$  soit égal à  $id_E$  ; que peut-on dire de  $f$  dans ce cas ?

132. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}^*$  définie par  $f(p, q) = 2^p(2q + 1)$  ; montrer que  $f$  est bijective.

133. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$  ; montrer que  $f$  est bijective, préciser l'application réciproque, et tracer les deux courbes.

134. Si  $f$  est une application de  $E$  vers  $F$ , on dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est un domaine d'injectivité de  $f$  si la restriction de  $f$  à  $A$  est injective, et ce domaine est dit maximal si le seul domaine d'injectivité contenant  $A$  est  $A$ .

(a) Déterminer un domaine d'injectivité maximal pour  $\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$  et pour  $\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - x \end{cases}$

(b) Montrer que si  $A$  est un domaine d'injectivité,  $A$  est maximal ssi  $f(A) = f(E)$ .

#### COMPLEXES

135. Soit  $a$  un complexe de module  $\neq 1$  et  $U$  l'ensemble des complexes de module 1 ; pour tout complexe différent de  $a$ , on pose  $f(z) = \frac{z - \bar{a}}{z - a}$  ; montrer que  $f$  définit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $U$ .

136. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z : 4z^3 - (10 + 4i)z^2 + (9 + 17i)z + 3 - 9i = 0$  sachant qu'elle a une solution imaginaire pure.

Rep :  $3i/2, (1 + i)/2, 2 - i$ .

137. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $z^3 - 4(1-i)z^2 + (2-11i)z - 3 + 15i = 0$  sachant qu'elle a une solution imaginaire pure.

Rep :  $-3i, 3-2i, 1+i$ .

138. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $2z^4 - (6-7i)z^2 + 4 + 3i = 0$ .

Rep :  $\pm(1+i)/2, \pm(2-i)$

139. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $z^4 + (3-6i)z^3 + 2(16-3i) = 0$ .

Rep :  $(\pm(1-3i), \pm(3+2i))$

140. Soient  $u$  et  $v$  deux complexes de module 1 ; construire graphiquement les deux racines carrées de  $uv$ .

141. Soient  $z, z'$  deux complexes,  $z \neq 0$  ; montrer que

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$$

(a) par le calcul

(b) géométriquement

142. Soit  $u$  un complexe ; montrer que  $u$  est de module 1 ssi  $\frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right)$  est un réel de  $[-1, 1]$ .

143. Montrer que  $|u| = |v| = |w| \Rightarrow |u+v+w| = |uv+vw+wu|$ .

144. On pose  $u_n = (1+i)^n$ ,  $A_n$  le point image de  $u_n$  ; indiquer comment on construit géométriquement  $A_n$  connaissant  $A_{n-1}$  ; appliquer sur une figure indiquant les premiers points de la suite.

145. On considère l'application  $f$  du plan complexe dans lui-même qui à tout point d'affixe  $z$  fait correspondre le point d'affixe  $z^2$ .

(a) Déterminer l'image par  $f$  des droites  $V_a : x = a$  et  $H_a : y = a$ . Nature et éléments caractéristiques de ces courbes ?

(b) Représenter graphiquement  $f(V_a)$  et  $f(H_a)$  pour  $a = -2, -1, 0, 1, 2$ .

146. Montrer que pour tous complexes  $a$  et  $b$ , on a  $|a-b|^2 \leq (1+|a|^2)(1+|b|^2)$ . Etudier le cas d'égalité et placer dans le plan les points  $A(a)$  et  $B(b)$  dans ce cas.

147. Soient  $(x, y, z)$  et  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  ; montrer que 
$$\begin{cases} x+y+z = a & a+b+c = 3x \\ x+jy+\bar{j}z = b & \Leftrightarrow a+jb+\bar{j}c = 3z \\ x+\bar{j}y+jz = c & a+\bar{j}b+jc = 3y \end{cases}$$

A quelle CNS portant sur  $(a, b, c)$  les solutions  $x, y, z$  du système 
$$\begin{cases} x+y+z = a \\ x+jy+\bar{j}z = b \\ x+\bar{j}y+jz = c \end{cases}$$
 sont-elles réelles ?

148. Résoudre le système d'inconnue  $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^3$  et de paramètre  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^3$  : 
$$\begin{cases} x+y+z+t = a \\ x+iy-z-it = b \\ x-y+z-t = c \\ x-iy-z+it = d \end{cases}$$

A quelle CNS portant sur  $(a, b, c, d)$  les solutions sont-elles réelles ?

149. On pose  $S_0 = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$ ,  $S_1 = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1}$ ,  $S_2 = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}$ .

Exprimer  $(1+1)^n, (1+j)^n, (1+\bar{j})^n$  en fonction de  $S_0, S_1, S_2$  ; en déduire la valeur de ces derniers.

rep :  $S_q = \frac{2^n + 2(-1)^n \cos\left((n-q)\frac{2\pi}{3}\right)}{3}$

150. On pose  $S_0 = \sum_{0 \leq 4k \leq n} \binom{n}{4k}$ ,  $S_1 = \sum_{0 \leq 4k+1 \leq n} \binom{n}{4k+1}$ ,  $S_2 = \sum_{0 \leq 4k+2 \leq n} \binom{n}{4k+2}$ ,  $S_3 = \sum_{0 \leq 4k+3 \leq n} \binom{n}{4k+3}$ .

Exprimer  $(1+1)^n$ ,  $(1+i)^n$ ,  $(1-1)^n$ ,  $(1-i)^n$  en fonction de  $S_0, S_1, S_2, S_3$  ; en déduire la valeur de ces derniers (on mettra  $1+i$  et  $1-i$  sous forme trigonométrique).

151. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  ( $n$  étant un entier  $\geq 1$  fixé) :  $z^n \in \mathbb{R}$  ; tracer l'ensemble des solutions pour  $n = 2$  puis 3.

152. Soit  $u$  une racine cinquième de 1 autre que 1,  $A = u + u^4$ ,  $B = u^2 + u^3$ .

Calculer  $A + B$  et  $AB$  ; en déduire  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\sin \frac{2\pi}{5}$ .

153. Soit  $u$  une racine septième de 1 autre que 1,  $A = u + u^2 + u^4$ ,  $B = u^3 + u^5 + u^6$ .

Calculer  $A + B$  et  $AB$  ; en déduire  $A$  et  $B$  si  $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ .

154. Soit  $u$  une racine septième de 1 ; calculer  $\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}$ .

Rep : -2 ou 3/2.

155. Déterminer de deux façons les racines quatrième de  $\sqrt{3} + i$  et en déduire  $\cos \frac{\pi}{24}$ ,  $\sin \frac{\pi}{24}$ .

### EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

156. Résoudre :  $(1+x^2)y' + 4xy = (2+5x+6x^2+x^3)e^x$

$$y = \lambda/(x^2+1)^2 + e^x(x+1).$$

157. Résoudre :  $x(1+x^2)y' = (1-x^2)y$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbb{R}_-^*$ ,  $\mathbb{R}$ .

158. Un escargot avance à une vitesse  $V_e$  sur un élastique rectiligne de longueur  $L$  dépendant du temps, élastique attaché en  $O$  et placé sur  $Ox$ .

(a) Montrer que l'abscisse  $x$  de l'escargot est régie par l'équation différentielle :

$$x' = V_e + x \frac{L'}{L}$$

et que la longueur  $y = L - x$  restant à parcourir par l'escargot pour atteindre l'extrémité de l'élastique est régie par

$$y' = -V_e + y \frac{L'}{L}$$

(b) On suppose  $V_e$  constante  $> 0$  et  $L = L_0 + Vt$  avec  $V$  constante  $> 0$ ,  $L_0 > 0$  ; à l'instant 0 l'escargot est en  $O$ . Déterminer  $y$  en fonction de  $t$ .

$$\text{REP : } y = L \left( 1 - \frac{V_e}{V} \ln \left( \frac{L}{L_0} \right) \right).$$

(c) En déduire que l'escargot atteint l'extrémité de l'élastique en un temps fini  $T$  à calculer :

$$\text{REP : } T = \frac{L_0}{V} \left( e^{\frac{V_e}{V}} - 1 \right)$$

(d) AN :  $V_e = 10 \text{ m/j}$ ,  $V = 100 \text{ m/j}$ ,  $L_0 = 100 \text{ m}$ .

REP :  $\approx 60 \text{ ans}$ ...

REM : on peut remplacer l'escargot par un vaisseau spatial et l'élastique par l'univers en expansion...

159. On emprunte un capital  $S > 0$  sur une durée  $T > 0$ , à un taux d'intérêt  $\blacksquare > 0$  par unité de temps. Le remboursement est linéaire, progressif ou dégressif, c'est à dire que le remboursement par unité de temps est de la forme  $\blacksquare(t) = at + r$ .

(a) En supposant l'unité de temps petite devant  $T$ , montrer que la somme restant due à l'instant  $t$  (que l'on notera  $y(t)$ ) vérifie l'équation différentielle  $y' - \blacksquare y + \blacksquare = 0$ .

(b) Résoudre cette équation.

(c) Exprimer  $r$  en fonction de  $S, T, \tau, a$ .

$$\text{REP : } \frac{e^{\tau T} \tau^2 S - a (e^{\tau T} - \tau T - 1)}{\tau (e^{\tau T} - 1)}$$

(d) Déterminer le remboursement total  $R$  en fonction de  $\tau, T, S$  lorsque les remboursements par unité de temps sont constants.

(e) A. N. du d) : prêt de 10000 euros sur 10 ans au taux annuel de 5% avec des remboursements mensuels constants (attention ■ est alors le taux d'intérêt mensuel).

160. Résoudre :  $y'' + 2y' + 2y = 5 \cos x$

$$y = \lambda e^{-x} \sin(x) + \mu e^{-x} \cos x + 2 \sin x + \cos x$$

161. Résoudre :  $y'' + y = 4x \cos x + 5e^{2x}$

$$y = \lambda \sin x + \mu \cos x + x \cos x + x^2 \sin x + e^{2x}$$

162. Résoudre l'équation différentielle non linéaire :  $y''y = y'^2$  (on ne cherchera que les solutions qui ne s'annulent jamais).

163. Résoudre le système différentiel :  $\begin{cases} x' = 2x + y - 2(\cos t + \sin t) \\ y' = -x + 2y + 2(\cos t - \sin t) \end{cases}$ , (c'est-à dire déterminer tous les couples de fonctions  $x$  et  $y$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) - 2(\cos t + \sin t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + 2(\cos t - \sin t) \end{cases}$ ); indication : déterminer une équation du second ordre vérifiée par  $x$ .

$$\text{Rep : } \exp(2^*t)^*(\cos(t)+\sin(t))+\cos(t), \exp(2^*t)^*(-\sin(t)+\cos(t))+\sin(t)$$

#### OPÉRATIONS

164. Soit  $*$  une loi associative dans  $E$  telle que pour tous  $x, y, z$  de  $E$   $x * x = x$  et  $x * y * z = y * z * x$ .

Montrer que  $*$  est commutative.

$$\text{Rep : } xy = xxy = yxx = yx.$$

165. On définit dans  $\mathbb{R}$  la loi  $*$  par  $x * y = a(x + y) + xy$ .

(a) A quelle condition sur  $a$  est-elle associative ?

(b) Etudier alors ses autres propriétés.

166. On définit dans  $\mathbb{R}$  la loi  $*$  par  $x * y = x + y + xy$ .

(a) Montrer que  $(\mathbb{R}, *)$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}, \times)$  par un isomorphisme du type  $f(x) = x + a$ ; en déduire les propriétés de  $*$ ;

(b) Calculer  $1 * 2 * \dots * n$ .

167. On définit dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  la loi  $*$  par  $a * b = \arctan\left(\frac{\sin a + \sin b}{\cos a \cos b}\right)$

(a) Montrer que  $\cos(a * b) = \frac{\cos a \cos b}{1 + \sin a \sin b}$  et calculer  $\sin(a * b)$ .

(b) Montrer que  $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, *)$  est un groupe.

168. Soit  $E$  un ensemble fini, et  $A$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $E$  non bijectives; montrer que  $A$  est une partie stable de  $E^E$  pour la loi  $\circ$  (ce qui fournit donc un exemple de loi associative sans élément neutre et non commutative); vérifier que cette propriété est fautive si  $E = \mathbb{R}$ .

169. Etudier les propriétés de la loi  $*$  définie dans  $\mathbb{R}$  par  $x * y = \text{arrondi}(x + y)$ . Que dire de la restriction de  $*$  à  $\mathbb{N}$  ?

Idem pour  $x *' y = \text{arrondi}(x) + \text{arrondi}(y)$ .

170. Etudier les propriétés de la loi  $*$  définie dans  $\mathbb{R}^2$  par  $(x, y) * (x', y') = (x + y', y + x')$ .

171. Etudier les propriétés de la loi  $*$  définie dans  $\mathbb{R}^2$  par  $(xx' + yy', xy' + yx')$ .

172. Etudier la distributivité de l'intersection sur la différence ensembliste dans  $\mathcal{P}(E)$ .

173. Soit  $A = \{x + jy \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$  où  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

(a) Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .

(b) Montrer que  $\forall z \in A \quad |z|^2 \in \mathbb{N}$

(c) Montrer qu'un élément de  $A$  est inversible ss'il est de module 1. En déduire l'ensemble  $G$  des inversibles de  $A$ . En donner la table et la structure.

174. Soit  $A = \{x + y \sqrt[3]{2} \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Z}$ .

(a) Montrer que  $\sqrt[3]{4} \notin A$ .

(b) Montrer que  $A$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  mais pas un sous-anneau.

175. Montrer que si dans un anneau intègre  $A$  un élément  $a$  possède un inverse à droite  $b$ , alors  $b$  est aussi inverse à gauche de  $a$ .

### ARITHMÉTIQUE

176. On divise deux entiers distincts  $a$  et  $b$  par leur différence  $a - b$ . Comparer les quotients et les restes obtenus.

177. Déterminer un critère le plus simple possible permettant de déterminer si un nombre écrit en base 3 est pair.

178. Montrer de 2 manières différentes que lorsqu'on retranche 1 à un carré impair, on obtient un multiple de 8.

179. Montrer que les entiers congrus à -1 modulo 8 ne peuvent être somme de trois carrés.

180. Montrer que si  $a$  et  $b$  sont des entiers non multiples de 5, alors un, et un seul, des nombres  $a^2 + b^2$  et  $a^2 - b^2$  est multiple de 5.

181. Montrer que si  $a$  et  $b$  sont deux entiers,  $a^4 + 4b^4$  n'est jamais premier, sauf si  $a^4 = b^4 = 1$ .

182. Montrer que si  $p = 3$  ou  $7$  et  $a$  et  $b$  sont des entiers,  $a^2 + b^2$  multiple de  $p$  implique  $a$  et  $b$  multiples de  $p$  (on peut montrer que cette propriété est même vraie pour tout premier  $p$  non congru à 1 modulo 4).

183. (a) Déterminer un entier  $u$  tel que  $4u$  est congru à 1 modulo 7.

(b) On se propose de résoudre en nombres entiers l'équation  $7x + 4y = 100$ .

i. Montrer que si  $(x, y)$  est solution,  $y$  est forcément congru à 4 modulo 7.

ii. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation et, parmi celles-ci, celles qui sont formées de nombres  $> 0$ .

(c) Dans un champ, il y a en tout 100 poules, vaches et cochons, avec plus de vaches que de cochons. Une vache mange à elle seule 5 tartes ; un cochon en mange 3, et trois poules en mangent 1. A eux tous, ils mangent 100 tartes. Combien y a-t-il de poules, de vaches, et de cochons?

184. Soient  $k, n$  deux entiers,  $1 \leq k \leq n$  ; donner une condition suffisante pour que

(a)  $\binom{n}{k}$  soit divisible par  $n$ .

(b)  $\binom{n}{k}$  soit divisible par  $n(n-1)$ .

(c) Montrer qu'il y a une infinité d'exemples dans le cas b.

185. Montrer que si un entier  $> 0$  est à la fois un carré et un cube alors c'est une puissance sixième. Généraliser à une puissance  $n$ -ième et une puissance  $m$ -ième.

186. Le maximum de 2 réels est noté  $a \vee b$  et le minimum  $a \wedge b$  ;

(a) En utilisant le fait que  $a \vee b = a + b - a \wedge b$ , donner une formule exprimant  $a \vee b \vee c$  uniquement à l'aide de  $+$  et  $\wedge$ .

(b) Montrer que pour  $a, b, c$  entiers  $> 0$ ,  $\text{ppcm}(a, b, c) = \frac{abc \cdot \text{pgcd}(a, b, c)}{\text{pgcd}(a, b) \text{pgcd}(b, c) \text{pgcd}(c, a)}$

SUITES

187. Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 3^n + (-2)^n$ .
188. Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$  et de la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = nu_n$ ; en déduire un encadrement de  $\binom{2n}{n}$ .
189. On pose  $u_n = \sqrt{n} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$  ( $n \geq 1$ )
- (a) Montrer que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$ , en déduire le sens de variation de  $(u_n)$ .
- (b) Montrer que  $u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$ , en déduire que  $(u_n)$  est majorée, et que  $\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{2n}}$ .
190. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}$ .
191. On pose  $r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
- (a) Montrer que  $r_n \leq \sqrt{n} + \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ .
- (b) En déduire que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{r_n}{\sqrt{n}}$  est croissante et majorée.
192. Soit  $(u_n)$  une suite numérique ; on pose  $v_0 = u_0$  et  $v_n = u_n - au_{n-1}$ ; exprimer  $u_n$  en fonction des termes de la suite  $(v_n)$ . Idem pour  $w_n = u_n - nu_{n-1}$ .
193. Soit  $u_n$  le nombre qui s'écrit 123... $n$  en base  $n+1$  ; exprimer  $u_n$  sous forme d'une somme et calculer cette somme à l'aide des suites géométriques.
194.  $1 = 1^3, 3 + 5 = 2^3, 7 + 9 + 11 = 3^3$  ; écrire la formule générale et la démontrer.
195. Arthur place  $S$  à un taux mensuel de 1% ; chaque mois est prélevé sur la somme placée 1 de frais fixes. Quelle somme aura-t-il au bout d'un an ? A partir de quelle somme ce placement est-il avantageux ?
196. Si  $f(x) = \sum_{k=1}^n x^k$ , on définit une suite de fonctions par récurrence en posant :  $f_0(x) = f(x)$  et  $f_{p+1}(x) = x f_p'(x)$ .
- (a) Donner et démontrer une formule développée pour  $f_p(x)$ .
- (b) En déduire par cette méthode  $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$ .
197. Calculer  $\sum_{k=1}^n x^k$
- (a) Par une méthode utilisant les dérivées.
- (b) Par une méthode n'utilisant pas les dérivées.
198. Achille parcourt l'axe des  $x$  à la vitesse  $V$  et une tortue à la vitesse  $v = V/k$  ; leurs positions à l'instant  $t$  sont données par  $X = Vt$  et  $x = a + vt$  ( $a > 0$ ).
- On pose  $X_0 = 0$  et  $x_0 = a$ , positions d'Achille et de la tortue à l'instant 0, et on définit deux suites  $(X_n)$  et  $(x_n)$ , de sorte que  $X_n$  et  $x_n$  soient les positions respectives d'Achille et de la tortue au même instant  $t_n$  et que  $x_{n+1}$  soit la position de la tortue au moment  $(t_{n+1})$  où Achille atteint la position  $x_n$  que la tortue avait à l'instant  $t_n$  (donc  $X_{n+1} = x_n$ ).

On demande de calculer  $x_n$  en fonction de  $n, k, a$ .

REP :  $a \frac{k}{k-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{k} \right)^{n+1} \right)$  ; écrire ce nombre en base 10 pour  $k = 10$ .

199. Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  sachant que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$  et  $u_0 = 2, u_2 = 13$
200. Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  sachant que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$  et  $u_0 + u_1 = 1; 10u_0 + u_3 = 1$ .
201. Soit  $(u_n)$  une suite récurrente double vérifiant  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ; montrer que la suite  $(v_n) = (u_{2n})$  est aussi une suite récurrente double et que l'équation caractéristique associée à  $(v_n)$  a pour solutions les carrés des solutions de celle associée à  $(u_n)$ .

202. Soit  $t \in ]0, 1[$  et  $(u_n)$  une suite définie par ses deux premiers termes et la relation  $u_n = \text{bar} \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_{n-2} \\ t & 1-t \end{pmatrix}$  ; calculer  $u_n$  et exprimer sa limite comme barycentre de  $u_0$  et  $u_1$ .

203. On donne  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_0 u_1 \dots u_n + 2 \end{cases}$  ; calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

204.  $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

(a) Déterminer une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n-1}$ ; en déduire  $u_n$ .

(b) Déterminer  $\lim u_n$  à l'aide d'un encadrement.

(c) En déduire  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}$ .

205.  $u_n = \sum_{k=2}^n \ln \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right)$

(a) Simplifier  $u_n$ ; en déduire sa limite.

(b) En déduire la convergence de  $(q_n) = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)$ .

206. Un escargot capable de parcourir 1 mètre par jour est situé (jour 1) à l'extrémité d'un ruban de longueur 10 mètres. Il voudrait parvenir à l'autre extrémité, mais chaque nuit lorsqu'il se repose, le ruban s'étire uniformément et s'allonge de 10 mètres.

Cet escargot, ou l'un de ses descendants a-t-il des chances de parvenir à ses fins ?

Indication : montrer que la distance  $u_n$  qu'il lui reste à parcourir à la fin du jour  $n$  vérifie la relation de récurrence :

$u_{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right) (u_n - 1)$ , calculer  $u_n$  et conclure en utilisant un résultat démontré dans le cours.

207. :

(a) une personne décide de manger  $1/10$  d'une plaque de chocolat, le lendemain  $1/10$  du restant et ainsi de suite. Au bout de combien de temps aura-t-elle mangé la moitié ? Quelle fraction aura-t-elle mangé à l'infini ?

(b) une personne décide de manger  $1/4$  d'une plaque de chocolat, le lendemain  $1/9$  du restant, le surlendemain  $1/16$  et ainsi de suite. Quelle fraction aura-t-elle mangé à l'infini ?

208. Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de réels  $> 0$  telle que la somme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  possède une limite finie  $S$ .

(a) Donner un exemple.

(b) Montrer que forcément  $u_n << \frac{1}{n}$  (indication : minorer  $S_{2n} - S_n$ )

(c)  $T_n = \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k+1})$ ; exprimer  $T_n$  en fonction de  $S_n$  et  $u_n$  et déterminer sa limite.

209. Soit  $\delta(n)$  le plus grand diviseur impair de  $n$  et  $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(k)}{k}$ ;

(a) Montrer que si  $n$  est impair,  $S(n) = S(n-1) + 1$  et sinon,  $S(n) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}S\left(\frac{n}{2}\right)$ ; calculer par exemple  $S(100)$ .

(b) Calculer  $S(2^n)$ .

$$\text{Rep : } \frac{2}{3} \left( 2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

(c) Montrer que  $S(n) = \frac{2}{3}n + O(1)$ .

$$\text{Rep : } \frac{2}{3}n < S(n) < \frac{2}{3}(n+1)$$

210. On dit qu'une suite  $(u_n)$  est *concave* si chaque terme est au-dessus de la moyenne des deux plus proches  $(u_n \geq \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2})$ ; montrer qu'une suite concave bornée est croissante convergente.

On montrera successivement :  $(u_{n+1} - u_n)$  décroissante,  $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$ ,  $(u_n)$  croissante,  $(u_n)$  convergente.

Donner un exemple non constant.

211. Soit  $(u_n)$  une suite de réels  $> 0$  de limite nulle; montrer que  $\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{2^k}$  ne tend pas vers 0, mais que  $\sum_{k=0}^n \frac{u_{n-k}}{2^k}$  tend vers 0.

212. On pose pour  $n \geq 1$  :  $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$ .

(a) Montrer que  $u_n \leq \sqrt{2n+1}$ .

(b) Vérifier que pour  $n \geq 2$   $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$  et en déduire  $\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ .

(c) Vérifier que pour  $n \geq 2$   $u_n - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$  et en déduire  $\lim(u_n - \sqrt{n})$ .

(d) Calculer à la machine  $u_{100} - \sqrt{100}$ .

213.  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ ,  $v_n = u_n + \frac{u_n}{n}$ ; montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

214.  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ ; déterminer la plus petite valeur de  $a$  de sorte que  $(v_n) = \left(u_n + \frac{a}{n}\right)$  soit croissante; en déduire la convergence de  $(u_n)$  et un calcul de sa limite à  $10^{-3}$  près (généralisation facultative :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ ,  $v_n = u_n + \frac{a}{n^{\alpha-1}}$  avec  $\alpha > 1$ )

215.  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k.k!}$ ,  $v_n = u_n + \frac{1}{n^2.n!}$ ; montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes (on peut montrer que la limite est  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ ).

216. Étudier la suite récurrente définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  avec  $f(x) = \frac{6}{x^2 + 2}$ .

$$\text{On donne } f(f(x)) - x = -\frac{(x-1)(x-2)(x^3 + 2x - 6)}{(x^2 + 2)^2 + 18}$$

217. Déterminer un équivalent simple quand  $n$  tend vers  $+$  l'infini de  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$ .

218. Déterminer un équivalent simple quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $u_n = \sum_{k=1}^n 2^k$  et de  $v_n = \sum_{k=1}^n 2^{k^2}$ .
219. Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_n + u_{n+1} \sim a_n$ ; montrer que si  $(u_n)$  est monotone, alors  $u_n \sim \frac{a_n}{2}$ , mais que ceci est faux dans le cas général.
220. On pose  $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{k}{k^2 - 1}$ ; montrer à l'aide d'une décomposition en éléments simples que  $u_n = h_n - \frac{3}{4} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  ( $h_n$  est la série harmonique).
221. Montrer que  $n! \ll n^n$  mais que  $\ln(n!) \sim \ln(n^n)$  (à l'aide d'une intégrale).

## ESPACES VECTORIELS

222. (a)  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x^2 + z^2 + 4y^2 - 4xy - 2xz = 0\}$  est-il un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  ?  
 (b)  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / 2x^2 + z^2 + 4y^2 - 4xy - 2xz = 0\}$  est-il un sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{C}^3$  ?
223. Les sous-ensembles suivants de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
- (a)  $\{(u_n) \in E / (u_n) \text{ est bornée}\}$   
 (b)  $\{(u_n) \in E / (u_n) \text{ est monotone}\}$   
 (c)  $\{(u_n) \in E / \forall n \ u_{n+2} = u_n\}$   
 (d)  $\{(u_n) \in E / \forall n \ u_{n+1} = \pm u_n\}$
224. Les sous-ensembles suivants de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
- (a)  $\{(u_n) \in E / (u_n) \text{ est croissante}\}$   
 (b)  $\{(u_n) \in E / (u_n) \text{ est monotone}\}$   
 (c)  $\{(u_n) \in E / (u_n) \text{ est la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante}\}$
225. Les sous-ensembles suivants de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
- (a)  $\{(u_n) \in E / \exists p \geq 1 / \forall n \ u_{n+p} = u_n\}$   
 (b)  $\{(u_n) \in E / \forall n \ \exists p \geq 1 / u_{n+p} = u_n\}$   
 Rep : 01010101  
 0010101010
226. Les sous-ensembles suivants de  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
- (a)  $\{f \in E / \exists a > 0 \ \forall x \ |f(x)| \leq a|x|\}$   
 (b)  $\{f \in E / \exists a > 0 \ \forall x \ |f(x)| \geq a|x|\}$
227. L'ensemble des fonction de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  dont la courbe présente une asymptote (horizontale ou oblique) au voisinage de  $+\infty$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  ?
228. Libre ou lié ?
- (a)  $\left( \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{array} \right] \right)$   
 (b)  $(\cos, \cos^2, \sin, \sin^2)$   
 (c)  $(f, g, h)$  avec  $f(x) = \cos 2x \cos x, g(x) = \sin 2x \sin x, h(x) = \cos x$ .
229. Soit  $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$  une famille libre de vecteurs de  $E$  et  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$ ; montrer que  $\mathcal{G} = (\vec{x}_1 - \vec{u}, \dots, \vec{x}_p - \vec{u})$  est liée ssi  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p$  vérifiant  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$  tels que  $\vec{u} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{x}_i$  et que dans ce cas, le rang de la famille  $\mathcal{G}$  vaut  $p - 1$ .

230.  $F = \{M \in \mathcal{M}_{2,3}(K) / \text{les lignes et colonnes de } M \text{ ont une somme nulle}\}$ .

Justifier sans calcul que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{2,3}(K)$  et déterminer sa dimension.

231.  $F = \text{vect} \left( \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; \dim F ? \text{ Equations cartésiennes de } F ? \text{ Base simple de } F ?$   
 Rep :  $-x+z+2t=0$
232. idem avec la transposée :  $11x-9y+z+t=0$
233.  $F = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(K) / \text{ les lignes, les colonnes et les diagonales de } M \text{ ont une somme alternée nulle} \right\}$   
 ; justifier que  $F$  est un sev de  $\mathcal{M}_{3,3}(K)$  et déterminer sa dimension.
234.  $F = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ h & d & e \\ g & f & i \end{bmatrix} \in K^8 / a+b+c = c+d+e = e+f+g = g+h+a \right\}$  ; justifier que  $F$  est un sev de  $K^8$   
 et déterminer sa dimension.
235.  $F$  est l'ensemble des étoiles magiques à 5 branches de somme nulle ; montrer que  $F$  est un sev de dimension 5 de  $K^{10}$ .
236.  $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$  ;  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  ;  $g(x) = 1/f(x)$  ;  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ;  $k(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  ;  $\text{rg}(f, g, h, k)$  ?
237. On pose  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = |x-1|$ ,  $h(x) = |x+1|$  ; montrer que  $(f, g, h)$  est libre et déterminer le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  que cette famille engendre.
238.  $F : \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-3y-2z=0 \end{cases}$  ; montrer  $F$  sev de  $K^4$ , en déterminer une base, un supplémentaire  $G$ , et définir la projection de base  $F$  et de direction  $G$ .
239.  $F : \{x+y-z-t=0\}$ ,  $G : \{x+y+z+t=0\}$  ; montrer  $F$  sev de  $K^4$  de dimension 3 (on admettra que de même pour  $G$ ) ; déterminer une base  $B$  de  $F \cap G$  que l'on complètera en deux bases  $C$  et  $D$  de  $F$  et  $G$ .
240. On donne trois réels  $a < c < b$  ; soit  $E = \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} / f \text{ est affine sur } [a, c] \text{ et affine sur } ]c, b]\}$   
 (a) Montrer que  $E$  est un espace vectoriel de dimension 4.  
 (b) Quelle est la dimension de  $E \cap \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  ?
241. Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $u$  un vecteur de coordonnées  $(a_1, \dots, a_n)$  dans  $B$ . Déterminer à quelle condition la famille  $B' = (e_1 - u, \dots, e_n - u)$  est une base de  $E$  (on pourra commencer par le cas  $n = 2$ ).
242. Montrer que les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$   $F$  formé des fonctions  $T$ -périodiques et  $G$  formé des fonctions nulles sur  $[0, T[$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
- RÉELS LIMITES
243. Soit  $(a_n)$  une suite de réels  $>0$  de limite infinie ; montrer que l'ensemble des quotients d'un entier par un élément de cette suite est dense dans  $\mathbb{R}$  ; qu'obtient-on si  $a_n = 10^n$ , ou  $2^n$  ?
244. limite de  $\frac{\cos x - e^{x^2}}{\cos x - \cos 2x}$ , de  $\frac{\text{ch } x - \text{ch } 2x}{\cos x - \cos 2x}$  quand  $x$  tend vers 0.
245. limite de  $\left( \tan \left( \frac{3}{2}x \right) \right)^{\tan 3x}$ , de  $\frac{\tan 9x}{\tan 3x}$  quand  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{6}$ .
246. limite de  $\left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
247.  $f(x) = \frac{\ln(x^4 + e^x)}{x}$  ; déterminer  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et un équivalent de  $f(x) - l$ .
248.  $f(x) = \frac{\ln(3e^x - 2e^{-x})}{x}$  ;  $D_f$  ?  $\lim_0 f$  ?  $\lim_{+\infty} f$  ?

249. Equivalent simple quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $e^{\sqrt{x^2+4x+4}}$ .

CONTINUE

250. Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle borné (non forcément fermé) est bornée sur cet intervalle.

251. Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle  $[a, b]$  est une fonction lipschitzienne. Est-ce encore exact si on remplace  $[a, b]$  par  $\mathbb{R}$  ?

252. Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = |x - \text{arrondi}(x)|$  ( $\text{arrondi}(x)$  est l'entier le plus proche de  $x$ ) est continue sur  $\mathbb{R}$  ; tracer.

253. Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{\{x\}(1 - \{x\})}$  ( $\{x\}$  est la partie fractionnaire de  $x$ ) est continue sur  $\mathbb{R}$  ; tracer.

254. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(x) \geq x$  pour tout  $x$  et dont le taux d'accroissement reste constamment dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

(a) Vérifier que  $f$  est continue et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Donner un exemple autre que  $f(x) = x + c$ .

(c) Montrer que  $|f(x)| \leq |f(0)| + |x|$  pour tout  $x$  puis que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

255. Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0, +\infty[$  vérifiant  $f(0) \geq 0$  et dont la courbe possède une direction asymptotique à l'infini de pente  $< 1$  ; montrer qu'elle possède un point fixe.

256. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles continues sur un intervalle  $[a, b]$  vérifiant  $f(a) = g(b)$  et  $f(b) = g(a)$  ; montrer qu'il existe  $c$  de  $[a, b]$  tel que  $f(c) = g(c)$ . Montrer que c'est faux si on ne suppose pas  $f$  continue.

257. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  ayant des limites finies en  $+\infty$  et  $-\infty$  ; montrer qu'elle est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Atteint-elle forcément ses bornes sur  $\mathbb{R}$  ?

258. Déterminer toutes les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

259. Déterminer toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continues en 0 et 1 vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x^2) = f(x)$ .

260. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions croissantes sur un intervalle ouvert  $I$ , dont la somme est continue sur  $I$  ; montrer que  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ .

261. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que l'image d'un intervalle est un intervalle.

(a) Montrer sur un exemple que  $f$  n'est pas forcément continue sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Montrer que si  $f$  est injective sur  $\mathbb{R}$  alors elle y est continue.

POLYNÔMES

262. Trouver des formules pour  $\deg(P \circ Q)$  et  $\text{val}(P \circ Q)$ .

263. Résoudre dans  $K[X]$  :  $P \circ P = P$ .

264. Résoudre dans  $K[X]$  :  $P \circ P = P^2$ .

Rep :  $1, 0, X^2$ .

265. Déterminer les fonctions polynomiales  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bijectives dont la réciproque est aussi polynomiale.

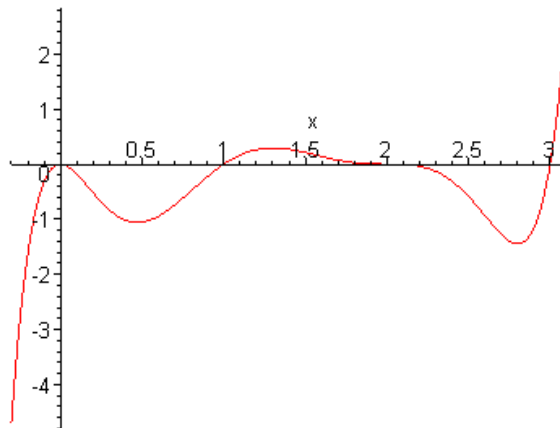
266. Montrer que la famille  $\left( (X-a)^k (X-b)^{n-k} \right)_{0 \leq k \leq n}$  où  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $K$  distincts est une base de  $K_n[X]$ .

267. Pour  $0 \leq k \leq n$ , on pose  $P_k = (1+X)^n - 2^n X^k$  ; quel est le rang  $r$  de la famille  $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  ?

268. Pour  $0 \leq k \leq n$ , on pose  $P_k = (X^{n+1} - 1) - (n+1)(X-1)X^k$  ; quel est le rang  $r$  de la famille  $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  ?

269.  $F = \{P \in K_n[X] \mid P(a) = 0\}$  où  $a$  est un élément de  $K$  fixé ; montrer que  $K$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $K_n[X]$  et déterminer une base de  $F$ .

270. Déterminer tous les polynômes  $P \in K[X]$  tels que  $P(2X) = 2P(X)$ . Donner un exemple d'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  non polynomiale vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R} f(2x) = 2f(x)$ .
271. Soit  $n$  un entier naturel et  $F = \{P \in K[X] \mid XP'' + (1+X)P' - nP = 0\}$ .
- (a) Montrer que  $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$  appartient à  $F$  ssi pour tout  $k \geq 1$   $k^2 a_k = (n-k+1)a_{k-1}$ .
- (b) En déduire que les éléments de  $F$  sont de degré  $\leq n$  et, pour  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  de  $F$ , calculer  $a_k$  en fonction de  $a_0$ .  
Quelle est la dimension de  $F$  ?
- (c) Résoudre l'équation différentielle :  $xy'' + (1+x)y' - 2y = 0$ .  
rep :  $\_C1*(2+4*x+x^2)+\_C2*(1/4*(-3-x)*\exp(-x)+1/4*\text{Ei}(1,x)*(2+4*x+x^2))$
272. Déterminer le pgcd  $D$  de  $A = X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - 2$  et de  $B = X^5 - X^3 + X^2 - 2X - 2$  par l'algorithme d'Euclide ; déterminer  $U$  et  $V$  tels que  $AU + BV = D$ .
273. Soit  $a$  un élément de  $K$  différent de 0 et 1 et  $P \in K[X]$  un polynôme tel que  $P(k) = a^k$  pour tout entier  $k$  de  $[0, n]$ . Montrer que  $P$  est au moins de degré  $n$ .  
Indication :  $P(X+1) - aP(X)$ .
274. Soit  $P \in K[X]$  un polynôme tel que  $P(k) = 1/k$  pour tout entier  $k$  de  $[1, n]$ . Montrer que  $P$  est au moins de degré  $n-1$ .
275. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que
- (a)  $P(n) = 1/n$  pour tout naturel non nul  $n$ .  
(b)  $P(n) = 2^n$  pour tout naturel  $n$ .  
(c)  $P(x) = e^x$  pour tout réel  $x$  entre 0 et 1.
276. Montrer que les racines de  $1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!}$  sont d'ordre 2 au maximum.
277. Déterminer l'ordre de 1 dans  $P = X^{2n+1} - (2n+1)(X^{n+1} - X^n) - 1$
- (a) Par les dérivées.  
(b) En remplaçant  $X$  par  $1+X$ .  
(c) variante : trouver  $a, b, c$  pour que  $X^{2n+1} + aX^{n+1} + bX^n + c = P$  soit divisible par  $(X-1)^3$ . Déterminer alors l'ordre de 1 dans  $P$ .
278. Que vaut  $f(x)$ ?



279. Déterminer un polynôme  $P_0$  de degré  $\leq 3$  tel que  $P_0(0) = 1, P_0'(0) = 0, P_0(1) = 0, P_0'(1) = 0$  ; puis déterminer tous les polynômes  $P$  vérifiant les mêmes propriétés.

280. On rappelle que si  $x_1, \dots, x_n$  sont  $n$  éléments de  $K$  distincts, pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ , il existe un unique polynôme de degré  $\leq n - 1$  noté  $L_i$  tel que  $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$  pour tout  $k, 1 \leq k \leq n$ , et que  $L_i = \frac{\prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} (X - x_k)}{\prod_{1 \leq k \leq n, k \neq i} (x_i - x_k)}$ ; on demande de

démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré  $\leq 2n - 1$  noté  $M_i$  tel que  $M_i(x_k) = 0$  et  $M_i'(x_k) = \delta_{i,k}$  pour tout  $k, 1 \leq k \leq n$ , et d'en donner une expression simple à partir de  $L_i$ .

Rep :  $M_i = (X - x_i) L_i^2$

281. Montrer que le polynôme à coefficients réels  $X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + s$  possède deux couples de racines réelles opposées ssi  $p = r = 0, s \geq 0$  et  $q \leq -2\sqrt{s}$ .

282. Soient  $a, b, c$  les 3 racines de  $X^3 + px^2 + qX + 1$ ; déterminer le polynôme unitaire ayant pour racines :

(a)  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ .

(b)  $ab, bc, ca$ .

(c)  $a + b, b + c, c + a$ .

### DÉRIVABILITE

(a) Soit  $V$  un voisinage de  $x_0$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $V$  et dérivables en  $x_0$ ; montrer que si  $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$ , et  $f(x_0) = g(x_0)$  alors  $f'(x_0) = g'(x_0)$ .

(b) Application :  $f(x) = x \cos x$ ; calculer  $f'(k\pi)$  ( $k$  entier) sans calculer  $f'(x)$  d'une façon générale.

283. Soit  $f$  une application de  $[0, 1]$  dans lui-même, croissante, vérifiant  $f \circ f = f$ .

(a) On suppose  $f$  continue sur  $[0, 1]$ ; montrer qu'il existe  $a \leq b$  tels que  $f([0, 1]) = [a, b]$ ; déterminer alors  $f$  sur  $[a, b]$  puis sur  $[0, a]$  et  $[b, 1]$ .

(b) Montrer que si  $f$  est dérivable sur  $[0, 1]$ , alors  $f$  est constante ou l'identité.

284. :

(a) Déterminer toutes les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et continues en 0 telles que  $f(2x) = f(x)$  pour tout  $x$ . Montrer que l'hypothèse de continuité en 0 est indispensable pour obtenir ces solutions.

(b) En déduire toutes les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$  en 0 telles que  $f(2x) = 2f(x)$  pour tout  $x$ .

(a) Déterminer toutes les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et continues en 0 telles que  $f(2x) = f(x)$  pour tout  $x$ . Montrer que l'hypothèse de continuité en 0 est indispensable pour obtenir ces solutions.

(b) En déduire toutes les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et dérivables en 0 telles que  $f(2x) = 2f(x)$  pour tout  $x$  (indication :  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ). Montrer que l'hypothèse de dérivabilité en 0 est indispensable pour obtenir ces solutions.

285. Déterminer toutes les fonctions  $f$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

286. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  de limite nulle aux deux infinis. Pour  $-1 < x < 1$ , on pose  $g(x) = f\left(\frac{x}{1-|x|}\right)$

(a) Prolonger  $g$  par continuité en -1 et 1.

(b) Montrer que  $g$  est dérivable en 1 de dérivée nulle ssi  $f(x) \ll \frac{1}{x}$ ;

(c) Donner un exemple avec  $f$  non constante et tracer les courbes de  $f$  et  $g$ .

287.  $f(x) = e^x + ax$  pour  $x \geq 0$  et  $b - \cos x$  pour  $x < 0$ .

Quelle est la classe de  $f$  en 0 suivant les valeurs de  $a$  et  $b$  ?

288.  $f(x) = \frac{\ln(2e^x - e^{-x})}{x}$ .

(a)  $D_f$  ?

(b) Prolonger  $f$  par continuité.

(c) Le prolongement  $\tilde{f}$  est-il dérivable en 0 (on donne  $e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  et  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ ) ?

(d) Est-il de classe  $C^1$  ?

289.  $f(x) = \cos \sqrt{x}$  pour  $x \geq 0$ , et  $f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{-x}$  pour  $x \leq 0$  ; montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

290.  $f(x) = e^x + x$  ; étudier  $f$ , définir et étudier  $f^{-1}$ , déterminer la classe de  $f^{-1}$ , tracer les deux courbes, donner les valeurs exactes de  $f^{-1}(1)$  et  $(f^{-1})'(1)$  et des valeurs approchées de  $f^{-1}(0)$  et  $(f^{-1})'(0)$ .

291.  $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}$

(a) Prolonger  $f$  par continuité en 0.

(b) Montrer que  $f$  est alors dérivable sur  $\mathbb{R}$ , strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et de dérivée s'annulant une infinité de fois dans tout voisinage de 0.

292. Calculer la dérivée  $n + 1$ ème de  $f : x \mapsto x^n \ln x$ .

293. Calculer la dérivée  $n$ ème de  $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$ . Montrer que  $f^{(n)}(1) = (-1)^n e \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) n!$ .

294. Soit  $f$  une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodique infiniment dérivable. Montrer que si  $f$  s'annule au moins  $n$  fois, alors chacune de ses dérivées s'annulent au moins  $n$  fois.

295. On pose  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  ; en appliquant la formule de Leibniz à  $x \mapsto xf(x)$ , déterminer une relation de récurrence permettant de calculer les termes de la suite  $(f^{(n)}(x))$  ; calculer  $f^{(4)}(1)$  par cette méthode.

296. Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  ayant sur cet intervalle deux racines distinctes et de même signe ; montrer qu'il existe entre ces racines un point de la courbe de  $f$  où la tangente passe par  $O$ .

Indication :  $\frac{f(x)}{x}$  (faire une figure).

297. Variante : soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[0, a[$ , continue sur  $[0, a]$  telle que  $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$  ; montrer qu'il existe un point de la courbe de  $f$  sur  $]0, a[$  où la tangente passe par  $O$ .

Indication :  $\frac{f(x)}{x}$  (faire une figure).

298. Montrer que si  $P$  est un polynôme réel de degré  $n$ , l'équation  $P(x) = e^x$  possède au plus  $n$  solutions et que si  $P$  n'est pas constant, l'équation  $P(x) = \sin x$  possède un nombre fini de solutions.

299. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe un réel  $k > 0$  tel que pour tout  $x$ ,  $f'(x) \geq k$  ;

(a) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Indication : utiliser le TAF sur  $[0, x]$ .

(b) Montrer que ce résultat est faux si l'on suppose seulement  $f'(x) > 0$  pour tout  $x$ .

300. Soit  $f$  une fonction dérivable décroissante sur  $[0, +\infty[$  ; étudier les diverses implications entre a), b), c).

(a)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$

(b)  $f(x+a) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  pour tout  $a > 0$

(c)  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

301. Soit  $f$  une fonction convexe sur  $[0, +\infty[$

(a) Montrer que lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , soit  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$ , soit  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$  réel (autrement dit, la courbe de  $f$  a toujours une direction asymptotique); indication : considérer  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$  et utiliser un théorème du cours.

(b) Montrer que dans le cas où  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$  alors  $f(x) - ax$  a une limite finie ou une limite infinie négative (donc que la courbe de  $f$  possède une asymptote ou une branche parabolique).

Indication : montrer que si  $0 \leq x < y$ , alors  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq l$ .

## FRACTIONS RATIONNELLES

302. Soit  $F$  une fraction rationnelle ; quelle relation peut on donner entre le degré de  $F$  et celui de  $F'$  ?

303. Calculer  $\sum_{k=2}^n \frac{k^4}{k^2 - 1}$ ;

REP :  $(n - 1)(4n^4 + 14n^3 + 34n^2 + 33n + 6)/12/n/(n + 1)$

304. Décomposer en éléments simples  $\frac{X^6 - X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 3X + 1}{X^5 - 2X^3 + X}$  :  $1/(-1 + X)^2 + 1/X + 2/(1 + X)^2 + X$

305. Décomposer en éléments simples  $\frac{X^5 - X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 2X + 1}{X^4 - X^3 - X^2 + X}$  :  $X+1/((X-1)^2)+1/X+2/(X+1)$

306. Décomposer en éléments simples  $\frac{X^6 + X^5 - X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2X - 1}{X^4 + X^3 - X^2 - X}$  :  $X^2+1/(X-1)+1/X+2/(X+1)$

307. Calculer  $\sum_{n \geq 2} \frac{n^2 + n + 1}{n^4 - n^2}$ , sachant que  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

308. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  à racines simples  $x_1, \dots, x_n$ .

(a) Décomposer  $1/P$  en éléments simples en utilisant  $P'$

(b) En déduire que si  $n \geq 2$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)} = 0$  et si  $n \geq 3$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{P'(x_k)} = 0$ .

309.  $A = (X - a)^n, B = (X - b)^m, A \neq B$  ; montrer que la recherche de la décomposition en éléments simples de  $1/AB$  revient à la recherche de la relation de Bézout entre  $A$  et  $B$ . Appliquer à  $(X - 1)^3$  et  $X^2$ .

## APPLICATIONS LINÉAIRES

310. Donner un exemple d'application linéaire de  $K^3$  dans  $K^4$  dont le noyau soit la droite  $x = y = z$  et dont l'image soit incluse dans l'hyperplan  $x + y - z - t = 0$ . Quelle est alors cette image ?

311. Donner un exemple d'endomorphisme de  $K^3$  dont l'image soit la droite  $x = y = z$  et dont le noyau contienne cette image. Quel est alors ce noyau ?

312. Donner un exemple d'endomorphisme de  $K^4$  dont l'image soit l'hyperplan  $x + y + t = 0$  et dont le noyau soit inclus dans cette image. Quel est alors ce noyau ?

313. Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  dans lui-même qui à toute fonction  $f$  fait correspondre la fonction  $\varphi(f)$  définie par  $\varphi(f)(x) = f(x + T) - f(x)$  ( $T > 0$  fixé) ; vérifier que  $\varphi$  est linéaire et déterminer son noyau et son image.

314. Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  dans lui-même qui à toute fonction  $f$  fait correspondre la fonction  $\varphi(f)$  définie par  $\varphi(f)(x) = f(x) - f(-x)$  ; vérifier que  $\varphi$  est linéaire et déterminer son noyau et son image. Pour l'image, on montrera d'abord qu'elle est incluse dans un sev  $F$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  bien connu, puis on montrera l'inclusion réciproque ; indication : calculer  $\varphi(f)$  pour  $f$  impaire.

315. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

(a) Montrer que  $\dim \ker f \leq \dim \ker f^2 \leq 2 \dim \ker f$  (indication :  $\ker f^2 = \ker f \oplus G$ , et la restriction de  $f$  à  $G$  est injective).

(b) Qu'en déduit-on pour  $\text{Im } g$  et  $\text{Im } g^2$  ?

- (c) Exemple où  $\dim \ker f^2 = 2 \dim \ker f$  ?
316. Soient  $f, g$  deux endomorphismes bijectifs d'un plan vectoriel  $E_2$ . Montrer que  $(f, g)$  libre équivaut à  $\exists \vec{x} \in E_2 / (f(\vec{x}), g(\vec{x}))$  libre.  
L'une des implications est facile, et on montrera l'autre par contraposée, et en se plaçant dans une base de  $E_2$ .
317. Soit  $\varphi$  l'application de  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dans lui même qui à  $f$  fait correspondre  $f - f'$ ; vérifier qu'elle est linéaire et étudier son injectivité et sa surjectivité.
318. Soit  $f$  un endomorphisme d'un plan vectoriel réel  $E_2$  vérifiant  $f^2 = -id$ .
- (a) Montrer que  $f$  est bijectif et donner son inverse.
- (b) Montrer qu'il existe une base de  $E_2$  où la matrice de  $f$  est  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .
319. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $(f - \lambda id) \circ (f - \mu id) = 0$  avec  $\lambda \neq \mu$ .
- (a) Montrer que  $\ker(f - \lambda id) = \text{Im}(f - \mu id)$  et donner une égalité similaire.
- (b) Montrer que  $E = \ker(f - \lambda id) \oplus \ker(f - \mu id)$  (analyse et synthèse).
- (c) En déduire que si  $E$  est de dimension finie,  $f$  possède une matrice diagonale.
- (d) Qu'obtient-on si  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$  ?
- (e) Qu'obtient-on si  $\lambda = 1$  et  $\mu = -1$  ?
320. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E_3$  de dimension 3 tel que  $f^3 = 0$  mais  $f^2 \neq 0$ .
- (a) Montrer que si  $f^2(\vec{a}) \neq \vec{0}$ ,  $(\vec{a}, f(\vec{a}), f^2(\vec{a}))$  est une base.
- (b) Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base ?
- (c) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
321. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  vérifiant  $f^n = 0$  mais  $f^{n-1} \neq 0$ .
- (a) Montrer que si  $f^{n-1}(\vec{a})$  est non nul, alors la famille  $\mathcal{B} = (\vec{a}, f(\vec{a}), \dots, f^{n-1}(\vec{a}))$  est une base de  $E$ .
- (b) Déterminer la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ .
- (c) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

## TAYLOR, DL et ÉTUDE DE FONCTION

322. Soient  $a < x_0 < b$  trois réels fixés et  $f$  une fonction numérique de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , 2 fois dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :  $f(x_0) - g(x_0) = -\frac{(x_0 - a)(b - x_0)}{2} f''(c)$  où  $g$  est l'unique fonction affine prenant les mêmes valeur que  $f$  en  $a$  et en  $b$ .  
Indication : poser  $\varphi(x) = f(x) - g(x) + \lambda(x - a)(b - x)$  où  $\lambda$  est un réel (que l'on ne demande pas de calculer) déterminé de façon à ce que  $\varphi(x_0) = 0$ , remarquer que  $\varphi$  s'annule trois fois et appliquer le théorème de Rolle.
323. Soient  $a < b$  deux réels fixés et  $f$  une fonction numérique de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , 2 fois dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :  $f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(c)$ .  
Indication : poser  $\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) - \lambda(b - x)^2$  où  $\lambda$  est un réel (que l'on ne demande pas de calculer) déterminé de façon à ce que  $\varphi(a) = 0$ , et appliquer le théorème de Rolle.
324. Déterminer le DLP<sub>3</sub> de  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$  en  $x_0 \neq 0$ ; en déduire pour quelle valeur  $x_0$  la courbe de  $f$  possède en  $(x_0, f(x_0))$  un point d'inflexion ; tracé de la courbe au voisinage de ce point.
325. Déterminer le DLP<sub>3</sub> de  $f(x) = xe^{-x}$  en  $x_0$ ; en déduire pour quelle valeur  $x_0$  la courbe de  $f$  possède en  $(x_0, f(x_0))$  un point d'inflexion ; tracé de la courbe au voisinage de ce point.

326.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ . Montrer que  $f$  possède un  $DLP_3$  en 0 ; qu'en déduit-on pour  $f$  en 0 ? Tracer l'allure de la courbe au voisinage de 0.
327. Soit  $f$  une fonction injective et de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0, de  $DLP_3$  en 0 :  $f(x) = x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$  ; déterminer en fonction de  $a$  et  $b$  le  $DLP_3$  de  $f^{-1}$  en 0. Vérifier pour  $f(x) = \ln(1+x)$ .
328.  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$  ;  $DLP$  en 0 à l'ordre  $2n + 1$  et  $DLG$  en  $+\infty$  à la précision  $\frac{1}{x^{2n}}$  (écrit avec un  $\sum$  et avec des ...)
329.  $f(x) = \frac{x(x+1)}{x-1}$  ;  $DL$  à tout ordre de  $f$  en 0, en 1, en  $\pm\infty$ .
330. Etudier  $f$  définie par  $f(x) = x^{x^{-x}}$ .
331.  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$  ; montrer que la courbe de  $f$  possède un centre de symétrie. Etudier  $f$  et tracer sa courbe.
332. Un point  $P(t, 1)$  parcourt la droite  $y = 1$  ; soit  $Q$  le projeté de  $P$  sur  $Ox$  et  $M$  le projeté de  $Q$  sur  $(OP)$  ; on demande de tracer le lieu  $(C)$  de  $M$  quand  $P$  varie (appelé cissoïde de Dioclès).  
On montrera que  $(C)$  a pour équation cartésienne  $x^2(1-y) = y^3$ , que l'on mettra sous la forme  $x = \pm f(y)$  et on étudiera  $f$ .
333. Etudier une fonction permettant de tracer la courbe d'équation cartésienne  $y^2(x-1) = x^3$ . On étudiera la position par rapport aux asymptotes.
334. Etudier une fonction permettant de tracer la courbe d'équation cartésienne  $y^2(3x+1) = x^2(x-1)$ . On étudiera la position par rapport aux asymptotes. On montrera que les 3 asymptotes forment un triangle équilatéral.

## MATRICES

335. Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  vérifiant  $|i-j| \geq 2 \Rightarrow A(i, j) = 0$  ; montrer qu'alors  $|i-j| \geq 3 \Rightarrow A^2(i, j) = 0$ .
336. Les ensembles  $G = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} / x \in K^* \right\}$  et  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} / x, y \in K^* \right\}$  sont-ils des groupes pour la multiplication des matrices ?
337.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  : calculer  $A^n$  pour  $n$  entier naturel ; peut-on étendre les résultats à  $n$  entier négatif ?
338.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  : calculer  $A^n$  pour  $n$  entier naturel en utilisant la formule du binôme ; peut-on étendre les résultats à  $n$  entier négatif ?
339.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  : calculer  $A^n$  pour  $n$  entier naturel en utilisant la formule du binôme ; peut-on étendre les résultats à  $n$  entier négatif ?
340. Montrer qu'une matrice  $A$  de  $M_{np}(K)$  est de rang 1 si et seulement si  $A$  est le produit d'une matrice colonne non nulle par une matrice ligne non nulle.
341. Soit  $A$  une matrice de  $M_n(K)$  de rang 1 ; montrer qu'il existe un nombre  $\alpha$  tel que pour tout  $p$  entier  $\geq 1$ ,  $A^p = \alpha^{p-1}A$
- (a) Méthode 1 : montrer d'abord que  $A = CL$  où  $L$  est une matrice ligne et  $C$  une matrice colonne et utiliser le fait que  $LC$  est un nombre.
- (b) Méthode 2 : soit  $f$  l'endomorphisme de  $K^n$  associé à  $A$  ; montrer que  $f(\vec{x}) = \lambda(\vec{x})\vec{e}$  et calculer  $f^p(\vec{x})$ .
342. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $M_n(K)$  vérifiant  $\text{trace}(AM) = \text{trace}(BM)$  pour toute matrice  $M$  de  $M_n(K)$ , alors  $A = B$ . Ceci signifie que quelle application est injective ?

343. Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

344. En dimension 3, un vecteur  $u$  a des coordonnées  $(x, y, z)$  dans une base  $(i, j, k)$  et des coordonnées  $(X, Y, Z)$  dans une base  $(I, J, K)$  vérifiant  $X = x + 2y$ ,  $Y = x + y - z$ ,  $Z = x - y + 2z$  ; on demande les expressions de  $I, J, K$  en fonction de  $i, j, k$ .

345. On donne dans un espace vectoriel de dimension finie trois bases  $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  ; On connaît la matrice  $P_1$  de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}_1$  et la matrice  $P_2$  de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}_2$  ; on considère l'endomorphisme  $f$  qui transforme la base  $\mathcal{B}_1$  en la base  $\mathcal{B}_2$  .

- (a) Quelle est en fonction de  $P_1$  et  $P_2$  la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_0$  ?  
 (b) Faire une application numérique où  $\mathcal{B}_0$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  deux bases très simples.

346. Soit  $f$  l'endomorphisme de matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  dans une base  $\mathcal{B}$  ;

- (a) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$ , non obtenue par permutation des éléments de  $\mathcal{B}$ , dans laquelle  $f$  a aussi pour matrice la matrice  $A$ .  
 (b) Si  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ , que peut on alors dire de  $A$  et  $P$  ? Vérifier.  
 (c) Déterminer une base  $\mathcal{D}$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale ; donner la nature de  $f$ .

#### COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINEAIRE

347. Soit  $p$  un projecteur de  $E$ , et  $F$  un sev de  $E$  ; montrer que

$$p(F) = (F + \ker p) \cap \operatorname{Im} p$$

$$p^{-1}(F) = (F \cap \operatorname{Im} p) + \ker p$$

#### DÉTERMINANTS

348. Montrer que ce taquin 

4	1	2
5	6	3
7	8	///

 est impossible à reconstituer.

Facultatif : montrer que celui-ci est possible : 

4	1	2
5	6	3
8	7	///

.

349. Factoriser  $\begin{vmatrix} 2b & b-c-a & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$  ;  $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$ .

350. Soit  $f$  un endomorphisme de matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ; déterminer à l'aide d'un déterminant les valeurs de  $\lambda$  telles qu'il existe un vecteur non nul  $\vec{x}$  vérifiant  $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$  (ne pas développer le déterminant, le factoriser à l'aide de combinaisons) ; déterminer l'un des vecteurs  $\vec{x}$  pour chaque valeur de  $\lambda$  obtenue.

351. Montrer à l'aide des déterminants que, dans l'espace, 3 plans se coupent en un point unique ssi leurs vecteurs normaux forment une famille libre.

352. Soit  $A$  une matrice carrée symétrique d'ordre impair à coefficients entiers dont les éléments diagonaux sont pairs ; montrer que son déterminant est un nombre pair.

353. Montrer que

$$\forall A \in A_n(K) \quad \det A \neq 0 \Leftrightarrow n \text{ est pair}$$

INTÉGRATION

354. On pose  $f(t) = tE(t) - (E(t))^2$

(a) Représenter les courbes de  $f$  et  $F$  où  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

(b) Calculer  $F(n)$  pour  $n$  entier naturel.

355.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $a$  et  $b$  sont deux réels ;

(a) on pose  $g(x) = \int_a^b f(t+x) dt$  ; montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  et calculer sa dérivée.

(b) Idem pour  $h(x) = \int_0^x f(t+x) dt$ .

356.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ; on pose  $g(x) = \int_a^b f(t+x) \cdot \sin(t+c) dt$ , avec  $a \leq b, c$  fixés.

(a) Montrer que  $g$  est continue en 0 ; on utilisera la continuité uniforme de  $f$  sur  $[a-1, b+1]$ .

(b) Montrer en se ramenant au a) que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

(c) Calculer  $g(x)$  pour  $f(x) = \sin x, a = 0, b = \pi, c = 0$ .

357. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $[a, b], a < b$  ;

(a) Montrer que si  $\forall x \in [a, b] \quad f'(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , alors  $\forall x \in [a, b] \quad f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  (et  $f$  est donc affine sur  $[a, b]$ ).

(b) On suppose que  $f'(a)$  et  $f'(b)$  sont  $< \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  et que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]a, b[$  ; montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f''(c) = 0$  (figure).

358. Soit  $f$  une fonction CM croissante sur  $\mathbb{R}_+$  ; on pose, pour  $x > 0, F(x) = \frac{\int_0^x f}{x}$  ; montrer que  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

(a) En supposant  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$

(b) Sans supposer  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$

359. Calculer  $\int_0^1 x \arcsin x dx$

(a) En commençant par effectuer une intégration par parties.

(b) En commençant par effectuer le changement de variable :  $t = \arcsin x$ .

(c) Représenter l'aire calculée.

360. Calculer  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(a) En posant  $t = 1/x$

(b) En posant  $t = \sqrt{x^2-1}$

(c) En posant  $t = x + \sqrt{x^2-1}$

(d) En posant  $t = \operatorname{argch} x$

361. Calculer  $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

- (a) En posant  $t = 1/x$
- (b) En posant  $t = \sqrt{x^2+1}$
- (c) En posant  $t = x + \sqrt{x^2+1}$
- (d) En posant  $t = \operatorname{argsh} x$

362. Calculer  $\int_{\sqrt{3}/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

- (a) En posant  $t = 1/x$
- (b) En posant  $t = \sqrt{1-x^2}$
- (c) En posant  $t = \arcsin x$

363. On pose  $E(x) = \int \frac{e^x}{x} dx$  ; calculer à l'aide de  $E(x)$  les primitives suivantes :

- (a)  $\int \frac{dx}{xe^x}$
- (b)  $\int e^x \ln x dx$
- (c)  $\int \frac{e^x}{x^2} dx$
- (d)  $\int e^{\frac{1}{x}} dx$
- (e)  $\int \frac{e^{x^2}}{x} dx$
- (f)  $\int e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx$

364. Calculer  $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x}$ , puis  $\int_0^\pi \frac{x dx}{1+\sin x}$ .  
rep : 2 et  $\pi$ .

365. Déterminer toutes les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $[0, \pi]$ , telles que  $f'(x) = \sin(f(x))$ . Tracer la courbe de la solution  $f$  vérifiant  $f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

$2 \arctan ke^x$ .

366. Etudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ .

367.  $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sqrt[n]{a^k b^{n-k}}$  ( $a, b > 0$ ) ; déterminer  $\lim u_n$ .

368.  $u_n = \sqrt[n+1]{\prod_{k=0}^n \frac{ka + (n-k)b}{n}}$  ( $a, b > 0$ ) ; déterminer  $\lim u_n$ .

REP :  $\frac{1}{e} \sqrt[b-a]{\frac{b^b}{a^a}}$ .

369.  $f(x) = e^{-x^2}$  ;  $I = \int_0^2 f(x) dx$  ;  $I_n$  = valeur approchée de  $I$  à l'ordre  $n$  par la méthode des trapèzes. On rappelle la majoration  $|I - I_n| \leq \max_{[a,b]} |f''| \frac{(b-a)^3}{12n^2}$ . On demande de déterminer une valeur de  $n$  (pas forcément la meilleure) pour laquelle  $I_n$  fournit une valeur approchée de  $I$  à  $10^{-3}$  près. Déterminer cette V.A. à la machine.

ESPACES EUCLIDIENS

370. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  une famille de vecteurs unitaires de  $E$  telle que pour tout vecteur  $\vec{x}$ ,  $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^p (\vec{x}|e_k)^2$ ; montrer que cette famille est une base orthonormée de  $E$ .

371. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  une famille libre de vecteurs de  $E$  telle que pour tout vecteur  $\vec{x}$ ,  $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^p (\vec{x}|e_k)^2$ .

- Montrer que  $p = n$  (on considérera l'orthogonal de  $\text{vect}(B)$ ),  
soit  $i$  entre 1 et  $n$
- Montrer que  $\|\vec{e}_i\| \leq 1$ .
- Montrer que  $\|\vec{e}_i\| \geq 1$  (on considérera un vecteur non nul de l'orthogonal de  $B \setminus (\vec{e}_i)$ ).
- Montrer que  $B$  est une base orthonormée de  $E$ .

372. L'espace  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  est muni du produit scalaire  $(f | g) = \int_0^1 fg$ .

Pour toute fonction  $f$  de  $E$ , on désigne par  $(f_n)$  la suite de fonctions définies par  $\begin{cases} f_n(x) = nx f(x) & \text{pour } 0 \leq x < 1/n \\ f_n(x) = f(x) & \text{pour } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$   
(faire une figure).

- Vérifier que  $f_n$  appartient bien à  $E$  pour tout  $n \geq 1$ .
- Montrer que si  $f$  est orthogonale à  $f_n$  pour tout  $n \geq 1$  alors  $f$  est nulle.
- Soit  $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ ; montrer que  $F^\perp = \{0\}$ .
- Quelle propriété des orthogonaux, vraie dans un espace euclidien, n'est donc pas vraie ici ?

373. Soient  $x_1, \dots, x_n$   $n$  réels distincts; on considère l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par  $\varphi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n))$

- Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- On définit une application de  $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$  dans  $\mathbb{R}$  par  $(P | Q) = \sum_{k=1}^n P(x_k) Q(x_k)$ ; vérifier que cette application est un produit scalaire (on pourra utiliser  $\varphi$ ).
- Trouver une base orthonormée pour ce produit scalaire (penser aux polynômes de Lagrange).

374. Soit  $A$  une matrice orthogonale d'ordre  $n$ .

- Calculer la norme euclidienne de la somme  $S = C_1 + \dots + C_n$  de ses colonnes.
- En déduire que la somme de ses coefficients est en valeur absolue inférieure ou égale à  $n$  (considérer la colonne  $C$  dont tous les coefficients sont égaux à 1).

375. L'espace vectoriel euclidien  $E_4$  est rapporté à la base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$  orthonormée. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel

de  $E_4$  d'équation  $\begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases}$ .

- Déterminer une base  $B_1$  orthogonale de  $F$  et une base  $B_2$  orthogonale de  $G = F^\perp$ .
- On oriente  $F$  et  $G$  de sorte que  $B_1$  et  $B_2$  sont directes; déterminer la matrice dans  $B_1 \cup B_2$  puis dans  $B$  de l'isométrie  $f$  de  $E_4$  dont les restrictions à  $F$  et  $G$  sont des rotations d'angle  $\pi/2$ .

376. Compléter la matrice  $\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \cdot \\ -8 & 4 & \cdot \\ 4 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  de sorte à obtenir une matrice orthogonale directe (resp indirecte) et étudier les isométries correspondantes.

377. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E_4$  espace vectoriel euclidien de matrice  $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  dans la base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$  orthonormée.

- (a) Vérifier que  $A$  est orthogonale et déterminer  $A^2$ .  
 (b) Déterminer les caractéristiques géométriques de  $f$ .

378. Déterminer les valeurs possibles de  $a$  et  $b$  pour que la matrice  $\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$  soit orthogonale ; étudier les isométries correspondantes.

379. Compléter la matrice  $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$  avec des entiers égaux à  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$  de sorte à obtenir une matrice orthogonale. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants et celui des vecteurs anti-invariants de l'endomorphisme associé.

$$\text{Rep : } A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

380. Dans l'espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe, écrire la matrice de la rotation d'angle  $\pi/2$  autour de  $\vec{n}(a, b, c)$ , vecteur unitaire.

381. Si  $\vec{n}$  est un vecteur non nul, et  $\alpha$  un réel, on note  $r_{\vec{n}, \alpha}$  la rotation autour de  $\vec{n}$  et d'angle  $\alpha$ ; montrer que si  $f$  est une isométrie quelconque,  $f \circ r_{\vec{n}, \alpha} = r_{f(\vec{n}), \alpha} \circ f$ .

Indication : poser  $r = f \circ r_{\vec{n}, \alpha} \circ f^{-1}$ , vérifier que c'est une rotation et chercher son axe et son angle.

Application : montrer que si  $f = r_{\vec{k}, \gamma}$ ,  $g = r_{f(\vec{j}), \beta}$ ,  $h = r_{g \circ f(\vec{i}), \alpha}$ , alors  $h \circ g \circ f = r_{\vec{k}, \gamma} \circ r_{\vec{j}, \beta} \circ r_{\vec{i}, \alpha}$

382. Soit  $f$  une rotation d'angle  $\theta \in ]0, \pi[$  de  $E_3$  ; montrer que pour tout nombre  $\alpha \in [0, \theta]$ , il existe un vecteur  $\vec{u}$  non nul tel que l'angle entre  $\vec{u}$  et  $f(\vec{u})$  soit de mesure  $\alpha$ .

383.  $D$  droite de  $E_3$ ,  $P$  plan ;  $S_D =$  retournement d'axe  $D$ ,  $s_P =$  réflexion par rapport à  $P$  ; à quelle CNS a-t-on  $S_P \circ S_D = S_D \circ S_P$ ?

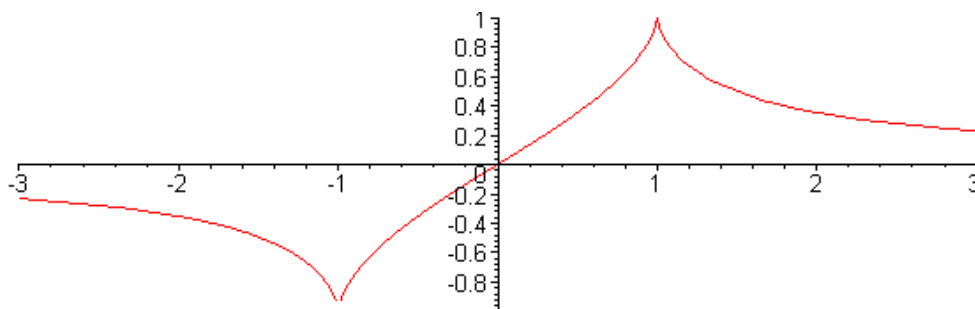
384. Soient  $f$  et  $g$  deux rotations propres de  $E_3$  qui ne sont pas des retournements ; montrer qu'elles commutent ssi elles ont le même axe. Étudier le cas où l'une est un retournement.

385.  $E_3$  est rapporté à la base orthonormée directe  $(i, j, k)$  ; on considère la rotation  $f$  d'angle  $\alpha$  autour de  $i$  et la rotation  $g$  d'angle  $\beta$  autour de  $j$  ; montrer que  $r = g \circ f$  est une rotation autour de  $n \left( -\cot \frac{\alpha}{2}, \cot \frac{\beta}{2}, 1 \right)$  et d'angle  $\theta$  vérifiant

$$\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

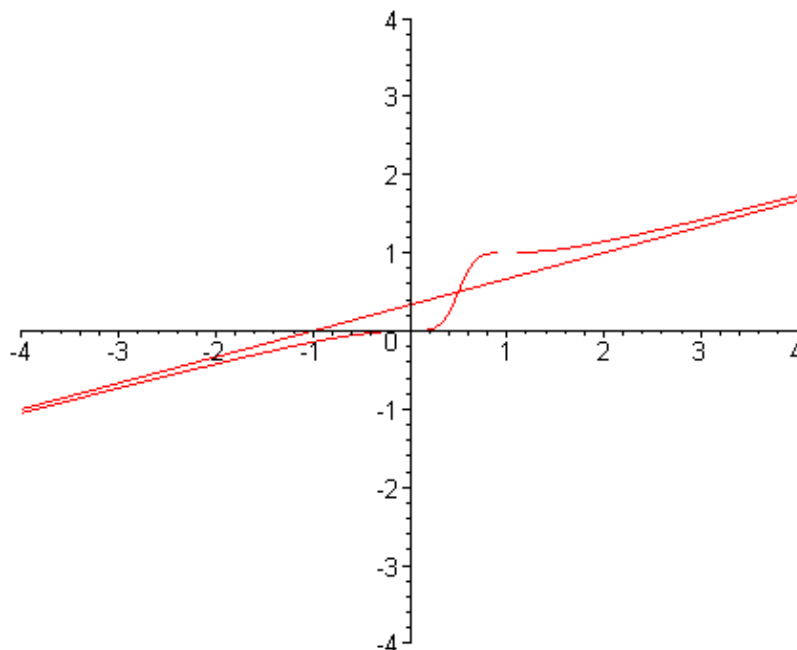
COURBES

386. Étudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = \frac{1-t^3}{1+t^3} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ .

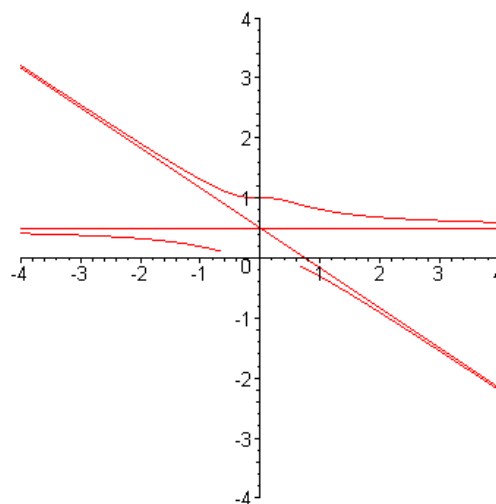


387. Étudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{1}{1+t^3} \end{cases}$  (folium de Descartes). Penser à  $t \rightarrow 1/t$ .

388. Etudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t} \\ y = \frac{t^3}{1+t^3} \end{cases}$ . Penser à  $t \rightarrow 1/t$ .



389. Etudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = \frac{t}{1-t^2} \\ y = \frac{t^3}{1+t^3} \end{cases}$ . Penser à  $t \rightarrow 1/t$ .

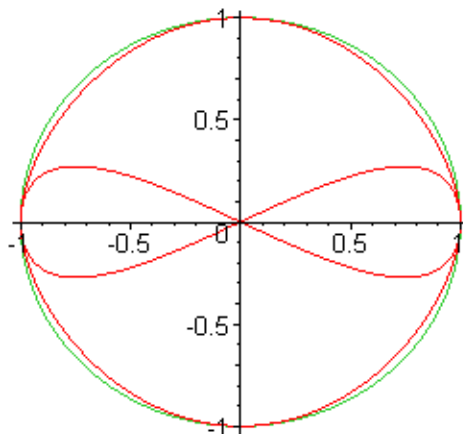


390. Etudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^4 - 2t^2 \end{cases}$

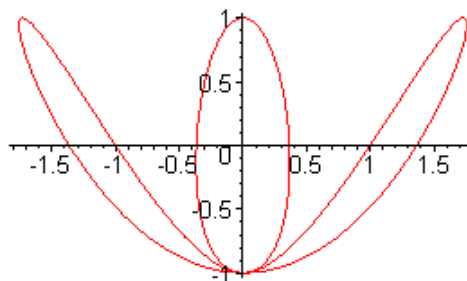
391. Etudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^4 - 2t^2 \end{cases}$

392. Etudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 2t \sin t \end{cases}$ . Expliquer pourquoi les portions pour  $\pm t \in \left[\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}\right]$  forment

quasiment un cercle.

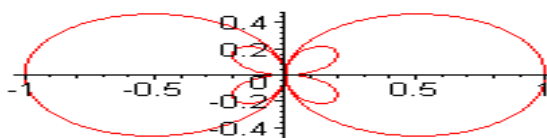


393. Étudier la courbe paramétrée définie par  $\begin{cases} x = \sin t + \sin 2t \\ y = -\cos 3t \end{cases}$ .

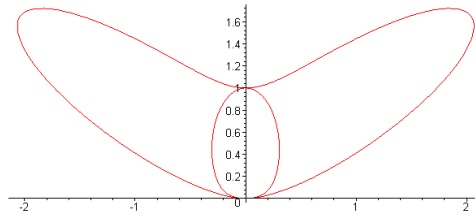


394. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = 1 + \sin 2\theta$  (oeuf double).

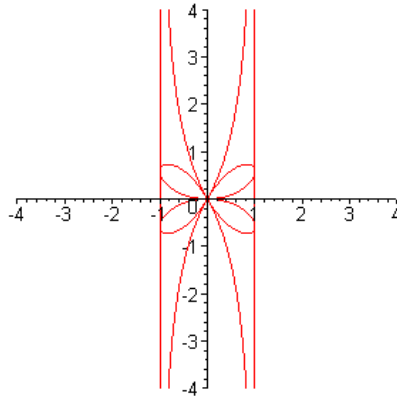
395. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = \cos \theta \cos(\theta/2)$  (pour la dérivée, passer en  $\theta/2$ ). Justifier pourquoi la courbe obtenue pour  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  est très proche d'un cercle.



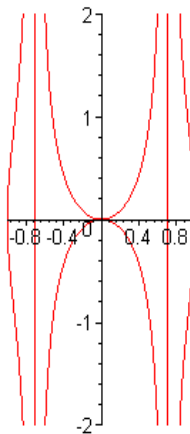
396. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = \frac{\sin \theta}{1 + \sin 2\theta \cos \theta}$



397. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = \sin 3\theta / \cos \theta$ .

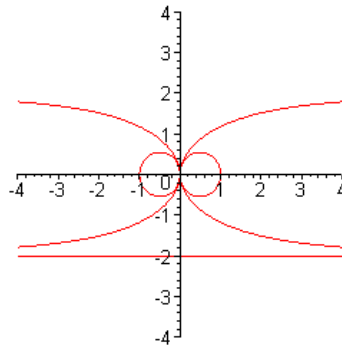


398. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = \cos(\theta/2) / \cos(\theta)$ .



399. Étudier la courbe définie en coordonnées polaires par  $\rho = \cos \theta / \cos(\theta/2)$ . Justifier pourquoi la courbe obtenue pour

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 3\frac{\pi}{2}$  est très proche d'un cercle.



### FONCTIONS DE 2 VARIABLES

400.  $f(x, y) = x^y$ ; étudier l'existence de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  et de  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f(x, y)$  pour  $y_0 \neq 0$ .

401.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ .

- Etudier et tracer la courbe de niveau 0 (coordonnées polaires). Tracer d'autres courbes de niveau de façon qualitative.
- Déterminer les points critiques et leur nature. Insérer dans la figure précédente.

402.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$ .

- Etudier et tracer la courbe de niveau 0 (coordonnées polaires). Tracer d'autres courbes de niveau de façon qualitative.
- Déterminer les points critiques et leur nature. Insérer dans la figure précédente.

403.  $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$ .

- Etudier et tracer la courbe de niveau 0. Tracer d'autres courbes de niveau de façon qualitative.
- Déterminer les points critiques et leur nature. Insérer dans la figure précédente.

404.  $f(x, y) = y^2 - (1 - x^2)^2$

- Tracer la courbe de niveau 0 et indiquer les zones où  $f$  est  $>0$  et celles où elle est  $<0$ . Tracer d'autres courbes de niveau de façon qualitative.
- Déterminer les points critiques et leur nature. Insérer dans la figure précédente.

405.  $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2$

- Montrer que la courbe de niveau 1 est la réunion de deux ellipses, les tracer, et indiquer les zones où  $f$  est  $>1$  et celles où elle est  $<1$ .
- Déterminer les points critiques et leur nature. Les insérer dans la figure précédente et tracer d'autres courbes de niveau de façon qualitative.

(a) Exprimer  $u^2 + v^2$  et  $u^3 + v^3$  en fonction de  $s = u + v$  et  $p = uv$ .

(b) On considère la surface de  $\mathbb{R}^3$  ( $S$ ) de paramétrisation : 
$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$$
 ; déterminer une fonction  $f$  telle que ( $S$ ) soit incluse dans la surface d'équation  $z = f(x, y)$ .

(c) Déterminer la condition portant sur  $(x, y)$  pour qu'un point  $(x, y, z)$  de la surface ( $S'$ ) soit dans la surface ( $S$ ) ; dessiner la zone du plan  $xOy$  correspondante.

406. On appelle rayon moyen d'un domaine du plan ayant un centre de symétrie la valeur moyenne de la distance d'un point de ce domaine au centre de symétrie.

- (a) Quel est le rayon moyen d'un disque de rayon  $R$  ?  
(b) quel est le rayon moyen d'un carré plein de côté  $2R$  ?

REP :  $2R/3, \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{3}R$