

I) DÉFINITION DE \mathbb{C} ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

1) Introduction historique.

a) Résolution de l'équation du troisième degré : $(E_1) : x^3 + 3x - 2 = 0$ par la méthode de Cardan (1501 - 1576, le même que celui qui a inventé les... cardans).

D1

b) Résolution de l'équation de Bombelli (1526 - 1573) : $(E_2) : x^3 = 15x + 4$. α) Par la recherche d'une solution "évidente".

D2

 β) par la méthode de Cardan.

D3

Bien que cette équation possède trois solutions réelles, on s'aperçoit que la méthode de Cardan oblige à considérer des nombres "imaginaires", dont le carré est négatif...

2) Définition de \mathbb{C} .

TH (admis) et définition :

Il existe un sur-ensemble \mathbb{C} de \mathbb{R} muni d'une addition et d'une multiplication prolongeant celles de \mathbb{R} et conservant les mêmes règles opératoires, et tel qu'il existe un élément i dont le carré est égal à -1 .Plus précisément, $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, et l'addition et la multiplication dans \mathbb{C} sont commutatives et associatives, et la multiplication est distributive par rapport à l'addition.Les nombres $x + iy$ sont appelés les nombres complexes.On a donc, pour x et y réels :

$(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
$(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$

D4

3) Propriétés de $+$ et $.$ dans \mathbb{C} :P1 : en plus de la commutativité et de l'associativité, l'addition a 0 pour élément neutre, et tout élément possède un opposé (on dit que $(\mathbb{C}, +)$ est un *groupe commutatif*).

D5

P2 : en plus de la commutativité, de l'associativité, et de la distributivité par rapport à l'addition, la multiplication a 1 pour élément neutre (on dit que $(\mathbb{C}, +, .)$ est un *anneau commutatif*).

D6

Adjointes aux 4 premières, ces 4 propriétés font de $(\mathbb{C}, +, .)$ un *anneau commutatif*.Il reste une neuvième propriété pour que $(\mathbb{C}, +, .)$ soit un *corps commutatif* :

P3 : si $z \neq 0$ il existe z' tel que $zz' = 1$
(tout complexe non nul possède un symétrique pour la multiplication)

On démontrera cette propriété ultérieurement.

4) Unicité de l'écriture algébrique $x + iy$ d'un complexe.PROP et DEF : Tout complexe z s'écrit de façon unique sous la forme : $x + iy$; x est la *partie réelle* (notée $\text{Re}(z)$) de z et y sa *partie imaginaire* (notée $\text{Im}(z)$). Les complexes de partie réelle nulle sont appelés les imaginaires purs.

D7

REM 1 : cela signifie que l'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto x + iy \end{cases}$ est

REM 2 : la partie imaginaire d'un complexe est un réel !

REM 3 : on a donc $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$, mais attention ceci n'est valable que si x, y sont réels ; par exemple :

$$i + i.i = -1 + i.1 \text{ et pourtant } i \neq -1$$

Par convention, dans la suite de ce cours, z sera toujours un complexe de partie réelle x et de partie imaginaire y .

5) Conjugué d'un complexe.

DEF : $\bar{z} = x - iy$ est le *conjugué* de z .

Propriétés :

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $z + \bar{z} = 2x$, d'où $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$.
3. $z - \bar{z} = 2iy$, d'où $i \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$; z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$.
4. $z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_+$
5. $z + z' = \bar{z} + \bar{z}'$; $zz' = \overline{z\bar{z}'}$

D9

6) Module d'un complexe.

DEF : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} (= \sqrt{x^2 + y^2})$ est le *module* de z .

REM 1 : le module, comme sa notation l'indique, prolonge la valeur absolue sur \mathbb{R} .

REM 2 : il vaut mieux le plus possible utiliser cette relation au carré : $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Propriétés :

6. $ \bar{z} = -z = z $
7. $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$
8. $ z - z' \leq z + z' \leq z + z' $ (inégalités triangulaires gauche et droite)
9. $ zz' = z z' $
10. $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$ (un produit de complexes est nul ssi l'un d'eux est nul)

D10

Lemme pour 8 : $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{z}')$.

Application de 9 : identité de Diophante.

7) Application : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps.

PROP : si $z \neq 0$

$$z \left(\frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z} \right) = 1$$

Tout complexe non nul possède donc un symétrique pour la multiplication : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps.

D11

Notation : le nombre $\frac{1}{z\bar{z}} \cdot \bar{z}$ est noté $\frac{1}{z}$, et, comme dans \mathbb{R} : $\frac{1}{z'}z = z \cdot \frac{1}{z'}$ est noté $\frac{z}{z'}$.

A bien savoir :

$$\frac{1}{i} = \bar{i} = -i$$

Les relations 2. et 3. ci-dessus peuvent donc s'écrire :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Et on a aussi :

$\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$
$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' } \quad (z' \neq 0)$
$ z^n = z ^n$ pour tout entier n et tout complexe non nul z
z est de module 1 ssi son conjugué est égal à son inverse
$\frac{z}{ z }$ et $\frac{\bar{z}}{ z }$ ($z \neq 0$) sont toujours de module 1.

D12

8) Problème de l'existence d'une relation d'ordre sur \mathbb{C} .

PROP : On peut trouver sur \mathbb{C} des relations d'ordre total prolongeant l'ordre usuel sur \mathbb{R} , c'est-à-dire, vérifiant :

1. $z \leq z$
2. $z \leq z'$ et $z' \leq z \Rightarrow z = z'$
3. $z \leq z'$ et $z' \leq z'' \Rightarrow z \leq z''$
4. $z \not\leq z' \Rightarrow z \geq z'$
5. si z et z' sont réels, $z \leq z'$ a la signification habituelle.

par contre, on ne peut pas en trouver qui soit de plus compatible avec l'addition et la multiplication, c'est-à-dire :

6. $z \leq z' \Rightarrow z + z'' \leq z' + z''$
7. si $z'' \geq 0$, $z \leq z' \Rightarrow zz'' \leq z'z''$

D13

C'est la raison pour laquelle la relation notée \leq ne concerne que les réels ;

PAS DE \leq entre complexes !

II) RACINES CARRÉES ET ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ ; méthode algébrique.

1) Racines carrées.

DEF : z est une racine carrée de $Z \iff Z = z^2$.

TH : On pose $Z = X + iY$ et $z = x + iy$; alors :

$$z \text{ est une racine carrée de } Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| \\ x^2 - y^2 = X \\ xy \text{ est du signe de } Y \end{cases}$$

Les deux racines carrées de Z sont donc

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2}} + i \operatorname{signe}(Y) \sqrt{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} - X}{2}} \right)$$

D14

REM : puisqu'il y a deux racines carrées, **NE JAMAIS ÉCRIRE** \sqrt{Z} , sauf si Z est réel ≥ 0 ; voici ce qui peut arriver si vous le faites :

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

2) Application à la résolution de l'équation du deuxième degré à coefficients complexes.

a) *Forme canonique* de $az^2 + bz + c$.

PROP : si $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant)

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = \frac{1}{4a} \left((2az + b)^2 - \Delta \right)$$

D15

b) Résolution de $az^2 + bz + c = 0$.

PROP : si $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède toujours deux solutions, confondues si $\Delta = 0$:

$$\frac{-b \pm \delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est l'une des racines carrées de } \Delta$$

D16

REM : si $b = 2b'$, alors $\Delta' = \frac{\Delta}{4} = b'^2 - ac$ est appelé le discriminant réduit et les solutions s'écrivent :

$$\frac{-b' \pm \delta'}{a} \text{ où } \delta' \text{ est l'une des racines carrées de } \Delta'$$

TOUJOURS UTILISER LE DISCRIMINANT RÉDUIT lorsque 2 se factorise dans b de façon apparente.

$$E2 : z^2 - (2 + 2i)z + 1 = 0$$

III) FORME TRIGONOMÉTRIQUE.

1) Formule de Moivre et formule d'Euler.

PROP : formule de Moivre : si $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, alors

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) f(\theta')$$

Cette propriété, similaire à celle de la fonction exponentielle, justifie (partiellement) le fait que l'on pose :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ceci n'est actuellement qu'une notation, et le lien avec la fonction exponentielle ne sera vu que plus tard.

La formule de Moivre devient alors :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

On en déduit, pour tout entier relatif n :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

D17

PROPRIÉTÉS :

$e^{i0} = e^{2i\pi} = 1 ; e^{i\pi} = -1 ; e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
$\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta' = \theta \pmod{2\pi}$
$u \text{ est de module } 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / u = e^{i\theta}$

et on a les formules d'Euler :

$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$
$\sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

D18

2) Applications à la trigonométrie.

a) Linéarisation.

On applique les formules d'Euler, puis on développe en utilisant la formule de Moivre, et on revient en sin et cos avec les formules d'Euler.

Exemples : E1

b) Mise sous forme de polynôme en cos et sin (appelé "polynôme trigonométrique")

PROP : On a les développements :

$\cos n\theta = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (1 - \cos^2 \theta)^k$
$\sin n\theta = \sin \theta \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} (\cos \theta)^{n-2k-1} (1 - \cos^2 \theta)^k$

D19

Ce qui donne, en posant pour tout réel x :

$T_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} (1-x^2)^k$
$U_{n-1}(x) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} (1-x^2)^k$

les formules :

$\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$
$\sin n\theta = \sin \theta U_{n-1}(\cos \theta)$

Les polynômes T_n et U_{n-1} sont les polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce.

(Чебышев)

c) Factorisation de $e^{ia} \pm e^{ib}$

PROP :

$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$
$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$

D20

d) Calcul de $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(\theta + k\varphi)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(\theta + k\varphi)$

REM : cf. ex. 2 sur les fonctions circulaires pour une méthode sans complexe.

PROP : si $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$

$C_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos\left(\theta + \frac{n}{2}\varphi\right)$
$S_n = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \sin\left(\theta + \frac{n}{2}\varphi\right)$

D21

IV) INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE ; ARGUMENT.

1) Interprétation géométrique.

On a les correspondances suivantes (P est un plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) et \vec{P} l'ensemble des vecteurs du plan) :

\mathbb{C}	\mathbb{R}^2	P	\vec{P}
$z = x + iy$	(x, y)	$M \begin{array}{ c} x \\ y \end{array}$	$x \vec{i} + y \vec{j} = \vec{u} = \overrightarrow{OM}$
$z + z'$	$(x + x', y + y')$		$\vec{u} + \vec{u}'$
$ z $	$\sqrt{x^2 + y^2}$	OM	$\ \vec{u}\ $
$ z' - z $

On dit que z est l'*affiche* de M et de \vec{u} , ce qui s'écrit $M(z)$ et $\vec{u}(z)$; M est le *point-image* de z et \vec{u} son *vecteur-image*.

Application 1 : si $A(a)$ et $B(b)$, \overrightarrow{AB} a pour affiche

Application 2 : équation complexe du cercle (C) de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R :

$$M(z) \in (C) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots$$

2) Argument d'un nombre complexe non nul.

DEF : si M est un point d'affixe $z \neq 0$, on appelle *argument* de z toute mesure en radians de l'angle orienté (\vec{i}, \widehat{OM}) ; notation $\arg z$.

REM 1 : cette notation $\arg z$ est pratique mais abusive dans la mesure où elle ne représente pas un seul réel, mais une infinité, différant d'un multiple de 2π ; on écrit ceci sous la forme :

$$\arg z = \theta \pmod{2\pi}$$

CNS : si $z \neq 0$

$$\arg z = \theta \pmod{2\pi} \Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{z}{|z|} \Leftrightarrow z = |z| e^{i\theta}$$

D22

PROPRIÉTÉS : avec $zz' \neq 0$

$\arg(zz') = \dots \pmod{2\pi}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \dots \pmod{2\pi}$
$\arg(\bar{z}) = \dots \pmod{2\pi}$
z est réel $\Leftrightarrow \arg z = 0 \pmod{\pi}$
z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

D23

3) Coordonnées polaires d'un point et forme trigonométrique d'un complexe.

Soit \vec{u} le vecteur unitaire du plan faisant un angle θ avec \vec{i} ; \vec{u} a donc pour affiche $e^{i\theta}$.

DEF : $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ est un couple de *coordonnées polaires* de M d'affixe z ssi

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$$

Ce qui revient à :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

L'écriture $\rho e^{i\theta}$ est appelée une forme *trigonométrique* (ou *exponentielle*, ou *polaire*) du complexe z .

ATTENTION :

REM 1 : ici ρ n'est pas forcément supposé ≥ 0 ; il vaut donc $\pm|z|$ et

$$\rho e^{i\theta} = z \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } \rho > 0 : |z| = \rho \text{ et } \arg z = \theta \pmod{2\pi} \\ \text{si } \rho < 0 : |z| = \dots\dots\dots \text{ et } \arg z = \dots\dots\dots \pmod{2\pi} \\ \text{si } \rho = 0 : z = 0 \end{cases}$$

D24

REM 2 : l'expression $2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}$ constitue une forme exponentielle de $e^{ia} + e^{ib}$.

V) RACINES n-ÈMES DES NOMBRES COMPLEXES.

1) Définition et premières remarque.

DEF : si z et $Z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$

z est une *racine n-ième* de Z si $z^n = Z$

REM 1 : pour $n \geq 1$, 0 a une et une seule racine n -ième : lui-même.

REM 2 : si n est pair et z est une racine n -ième de Z , alors $-z$ également.

REM 3 : si $n = pq$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, les racines n -ièmes de Z en sont les racines p -ièmes des racines q -ièmes.

REM 4 : les racines n -ièmes du conjugué de Z sont les conjugués des racines n -ièmes de Z .

REM 5 : si z_0 est l'une des racines n -ièmes de $Z \neq 0$, on obtient toutes les autres en multipliant z_0 par les racines n -ièmes du nombre 1 (que l'on nomme traditionnellement : racines n -ièmes "de l'unité").

D25

2) Résolution à l'aide de la forme exponentielle.

TH : si $Z \neq 0$ est de module R et d'argument Θ , z possède exactement n racines n -ièmes distinctes de même module égal à $\sqrt[n]{R}$ et d'argument :

$$\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in [0, n-1]$$

D26

REM 1 : les points-images de ces racines forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{R}$; on en déduit que la somme des racines n -ièmes d'un complexe est nulle.

REM 2 : puisqu'il y a n racines n -ièmes, ON N'ECRIT JAMAIS DANS UN CALCUL $\sqrt[n]{Z}$ sauf si Z est réel ≥ 0 .

Eventuellement, on peut par contre considérer que l'écriture $\sqrt[n]{Z}^{\mathbb{C}}$ représente L'ENSEMBLE des n racines n -ièmes complexes de Z (notation non classique).

Exemples E3 : $\sqrt{1}^{\mathbb{C}} = \{1, -1\}$, $\sqrt{-1}^{\mathbb{C}} = \{i, -i\}$, et déterminer de même les ensembles $\sqrt{i}^{\mathbb{C}}$, $\sqrt{1+i}^{\mathbb{C}}$, $\sqrt[3]{-1}^{\mathbb{C}}$, $\sqrt[4]{-1}^{\mathbb{C}}$, $\sqrt[5]{-1}^{\mathbb{C}}$.

- construire graphiquement les 8 racines huitième de $(-3 + 4i)/5$.
- déterminer une valeur approchée d'une racine cinquième de $-2 + 3i$ à l'aide d'une machine à calculer.
- calculer $(2 + i)^3$ et en déduire l'ensemble $\sqrt[3]{2 + 11i}^{\mathbb{C}}$.

3) Groupe des racines n -ièmes de l'unité.

Remarque préalable : l'inverse, le conjugué, le produit de racines n -ièmes de l'unité est encore une racine n -ième de l'unité.

D27

On verra plus tard que cela implique que l'ensemble $U_n = \sqrt[n]{1}^{\mathbb{C}}$ de ces racines forme un groupe multiplicatif ; on a :

$U_1 = \{1\}, U_2 = \{1, -1\}, U_3 = \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\}$; si l'on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors $U_3 = \{1, j, j^2\}$ et l'on a :

$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (forme à utiliser le moins possible)
$j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$
$1 + j + j^2 = 0$

$U_4 = \{\dots\dots\dots\}, U_6 = \{\dots\dots\dots\}$

Et si $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}, U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z} \right\} = \{1, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}$

Et comme $u^{n-k} = \bar{u}^k$ on peut écrire :

$$U_n = \begin{cases} \{1, u, \bar{u}, u^2, \bar{u}^2, \dots, u^p, \bar{u}^p\} & \text{si } n = 2p + 1 \\ \{1, \dots\dots\dots\} & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

D28

4) ÉPILOGUE : résolution de l'équation de Bombelli dans \mathbb{C} .

D29

VI) Similitudes directes du plan.

DEF : la rotation plane de centre Ω et d'angle θ est l'application $M \mapsto M'$ définie par

$$\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta & [2\pi] \\ \Omega M = \Omega M' \end{cases}$$

la similitude plane (directe) de centre Ω d'angle θ , de rapport k est la composée (commutative) de la rotation précédente avec l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

PROP : multiplier un complexe par le complexe $ke^{i\alpha}$ revient à faire subir à son point image une similitude directe de centre O de rapport k et d'angle α .

D31

APPLICATION :

1. Si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la similitude directe de centre $\Omega(\omega)$ de rapport k et d'angle α , on a :

$$z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$$

2. Si a et b sont deux complexes, la transformation du plan

$$M(z) \mapsto M'(z') \text{ avec } z' = az + b$$

est

- soit la translation de vecteur $\vec{u}(b)$ si $a = 1$.
- soit la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ de rapport $|a|$ d'angle $\arg a$ si $a \neq 1$.

C'est une homothétie ssi a est réel, et une rotation ssi a est de module 1.

D32

Devinette : pourquoi -1 est-il le nombre le plus laid des mathématiques ?