I DEFINITION PAR FOYER ET DIRECTRICE

DONNÉES dans le plan (P) : (D) droite, $F \notin (D)$, $e > 0$.
Δ droite perpendiculaire à (D) passant par F, coupant (D) en K ;

DEF : la *conique* de *foyer* F, de *directrice* (D) et d'*excentricité* e est par définition l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal du point M sur (D) ;

$$\Gamma(F, D, e) \overset{def}{=} \{M \in P \ / \ \frac{MF}{MH} = e\}$$

FIG 1

REM 1 : (Δ) est un axe de symétrie de Γ appelé *axe focal* de Γ.
On pose :
$d = FK =$ distance du foyer à la directrice.
$p = MF$ lorsque $(MF) \perp (\Delta) = ed =$ *paramètre* de la conique (appelé aussi $\frac{1}{2}$*corde focale* ou $\frac{1}{2}$*latus rectum*)

REM 2 : L'excentricité e définit entièrement la conique à *similitude* près, tandis que deux des nombres d , p et e définissent entièrement la conique à *isométrie* près.

PROP : l'équation polaire de Γ dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{FK}}{FK}$ est $\boxed{\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}}$

La directrice a pour équation polaire : $\rho = \dfrac{d}{\cos\theta}$.
Réciproquement, une équation polaire du type :

$$\frac{1}{\rho} = A\cos\theta + B\sin\theta + C \ (C > 0)$$

est celle d'une conique de foyer le pôle, de paramètre $p = \dfrac{1}{C}$ et d'excentricité $e = p\sqrt{A^2 + B^2}$.

D1

II) **CAS** $e \neq 1$ **: CONIQUES A CENTRE (OU BIFOCALES)**

PROP : l'intersection de Γ avec Δ est formé de deux points A, A′ définis par $\boxed{\left|\begin{array}{ll} \overrightarrow{AF} = -e\ \overrightarrow{AK} & (1) \\ \overrightarrow{A'F} = e\ \overrightarrow{A'K} & (2) \end{array}\right.}$

D2
DEF : A et A' sont les *sommets* de la conique, le milieu O de $[AA']$ est le *centre* de la conique.

FIG 2

REM : $\dfrac{\overline{A'F}}{\overline{A'K}} = -\dfrac{\overline{AF}}{\overline{A'K}}$; cela signifie que les points A', A, F, K forment dans cet ordre une division harmonique.

PROP : $\boxed{\overrightarrow{OF} = e\ \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\ \overrightarrow{OA}}$.

D3 (effectuer (1) + (2) et (2) - (1)).
On pose alors:
$a = OA = \dfrac{d}{\left|e - \dfrac{1}{e}\right|} =$ *rayon focal* de la conique ($2a$ = *diamètre focal*)
$c = OF = ea = \dfrac{p}{\left|e - \dfrac{1}{e}\right|} = \frac{1}{2}$*distance focale* de la conique
$b = \sqrt{|a^2 - c^2|} = \sqrt{|1 - e^2|}\ a =$ *rayon non focal* de la conique ($2b$ = *diamètre non focal*)
On a alors les relations :

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ d &= \left|e - \frac{1}{e}\right| a = \frac{b^2}{c} \\ p &= \left|1 - e^2\right| a = \frac{b^2}{a} \\ OK &= \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

D4

PROP : Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, Γ a pour équation : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$.

Γ est donc aussi symétrique par rapport à la droite (D_0), perpendiculaire à Δ passant par O, appelée *axe non focal.*
Si s est la symétrie orthogonale par rapport à D_0 , $F' = s(F)$, $D' = s(D), K' = s(K)$,
alors

$$\Gamma(F, D, e) = \Gamma(F', D', e) \text{ (définition bifocale de } \Gamma)$$

.

F et F' sont les deux *foyers* de Γ, D et D' ses deux *directrices.*
Le *rectangle des axes* est le rectangle délimité par les droites : $x = \pm a,\ \ y = \pm b.$
On définit les points : $B(0, b)$ $B'(0, -b)$ et $C(a, b)$.

III) CAS $e < 1$: ELLIPSE

Alors $c < a$ et $b^2 = a^2 - c^2$; Γ a pour équation : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$.
a s'appelle aussi dans ce cas le $\frac{1}{2}$*grand axe*, ou le *grand rayon* et b le $\frac{1}{2}$*petit axe*, ou le *petit rayon.*
A et A' sont les sommets *principaux* (rayon de courbure : $\frac{b^2}{a} = p$), B et B' les sommets *secondaires* (rayon de courbure : $\frac{a^2}{b}$).

DEF : $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ est appelé le *coefficient d'applatissement* de l'ellipse (par rapport au cercle de rayon a).

PROP : la longueur de l'ellipse est égale à $4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2\pi a \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \dfrac{e^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \dfrac{e^6}{5} - ...\right)$; son aire est πab.

REM : deux parmi les 6 nombres a, b, c, d, e, p définissent entièrement l'ellipse à isométrie près.

PROP : l'ellipse Γ a pour paramétrisation : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

PROP : l'ellipse Γ est l'image par l'affinité (ou dilatation) $\left\{ M_1 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \end{array} \right. \mapsto M \left| \begin{array}{l} \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \end{array} \right. \right.$ du cercle *principal* (ou *circonscrit*, ou *grand*) $C(O, a)$ et aussi image par l'affinité (ou dilatation) $\left\{ M_2 \left| \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \end{array} \right. \mapsto M \left| \begin{array}{l} \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \end{array} \right. \right.$ du cercle *secondaire* (ou *inscrit*,ou *petit*) $C(O, b)$.

COROLLAIRE : construction point par point de l'ellipse dite "PAR RÉDUCTION D'ORDONNÉE"

D5
FIG 3

PROP : construction du foyer et de la directrice connaissant le rectangle des axes.

1) $BF = OA$ $(= a)$ d'où la construction de F connaissant le rectangle des axes.

2) La droite (BF) coupe la droite $x = a$ en D tel que $BD = \dfrac{a^2}{c} = OK$; d'où la construction de K connaissant le rectangle des axes.

D6
FIG 4
REM : Si $\mathcal{A} = FA' = a + c =$ *apogée*, et $\mathcal{P} = FA = a - c = FA =$ périgée, alors

$$\boxed{e = \frac{\mathcal{A} - \mathcal{P}}{\mathcal{A} + \mathcal{P}}}$$

PROP : construction point par point par la MÉTHODE DE LA BANDE DE PAPIER :

Γ est l'ensemble des points M du plan tels qu'il existe P sur Ox et Q sur Oy vérifiant :
$PM = b$, $QM = a$, et P, Q, M alignés.
D7
FIG 5

PROP : définition bifocale : $M \in \Gamma \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$.
Application au tracé du jardinier.
D8
FIG 6

En dérivant cette relation, on obtient : $\left(\dfrac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \dfrac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}\right).\overrightarrow{T} = 0$, où $\overrightarrow{T}$ est le vecteur tangent.
COROLLAIRE : la tangente à Γ en M est la bissectrice extérieure en M du triangle MFF'.
Application aux miroirs elliptiques, et à la génération tangentielle de l'ellipse.

D9 FIG 7
Equation cartésienne de la tangente à Γ en $M_0\,(x_0, y_0)$: $\boxed{\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1}$

D10

IV) CAS : $e > 1$: HYPERBOLE

Alors $c > a$ et $b^2 = c^2 - a^2$; Γ a pour équation : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

PROP : l'hyperbole a pour paramétrisation : $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}$ ou : $\begin{cases} x = \pm a \text{ch } t \\ y = b \text{ sh } t \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = t \\ y = \pm \dfrac{b}{a}\sqrt{t^2 - a^2} \end{cases}$.

D11
L'axe focal $(A'A)$ est aussi appelé l'axe *transverse*. $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$ sont appelés les *pseudo-sommets*.

PROP : construction du foyer et de la directrice connaissant le rectangle des axes.
1) $OC = OF = \sqrt{a^2 + b^2} = c$ d'où la construction de F connaissant le rectangle des axes.
2) Soit $D \in [OC]$ tel que $OD = a$; alors K est le projeté de D sur Ox ($\dfrac{OK}{a} = \dfrac{a}{c}$).

D12 FIG 8
PROP : Les asymptotes $\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} = 0$ sont dirigées par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{I}\left(\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}\right)$ et $\overrightarrow{J}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$.
Si α est l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{J})$, on a : $e = \dfrac{1}{\cos \alpha}$; $\cos \alpha = \dfrac{a}{c}$; $\sin \alpha = \dfrac{b}{c}$; $\tan \alpha = \dfrac{b}{a}$.

D13

PROP et DEF : les asymptotes sont orthogonales $\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow e = \sqrt{2}$; dans ce cas l'hyperbole est dite *équilatère*.
ÉQUATION DE L'HYPERBOLE RAPPORTÉE À SES ASYMPTOTES (i. e. dans $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$) :

$$\boxed{XY = \frac{c^2}{4}}$$

Application au tracé à partir des asymptotes et d'un point.

D14 FIG 9

PROP : Définition bifocale : $M \in \Gamma \Leftrightarrow |MF' - MF| = 2a$.

D15 FIG 10
En dérivant cette relation, on obtient :

$$\left(\frac{\overrightarrow{MF'}}{MF} - \frac{\overrightarrow{MF}}{MF}\right).\overrightarrow{T} = 0$$

, où $\overrightarrow{T}$ est le vecteur tangent.

COROLLAIRE : la tangente à Γ en M est la bissectrice intérieure en M du triangle MFF'.

Application aux miroirs hyperboliques, et à la génération tangentielle de l'hyperbole.

D16 FIG 11
Équation cartésienne de la tangente à Γ en $M_0\,(x_0, y_0)$:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

D17

V) CAS $e = 1$: PARABOLE

TRACÉ MÉCANIQUE à partir de la définition : $M \in \Gamma \Leftrightarrow MF = MH$.
FIG 12

Notations :
$p = FK = d$; $O =$ milieu de $[FK] =$ *sommet* de la parabole (O correspond au point A du cas des coniques à centre ; A' est rejeté à l'infini).
PROP : Équation cartésienne dans le repère orthonormé $(O, -\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: $y^2 = 2px$.
Équation de la tangente (T) : $y_0 y = p(x + x_0)$.
D18
PROP : (T) est la bissectrice intérieure de FMH.

D19 FIG 13

VI) RÉDUCTION DE L'ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE COURBE DE DEGRÉ 2.

Soit Γ la courbe d'équation cartésienne dans un repère orthonormé : $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

TH 1 : si $b \neq 0$, en effectuant une rotation du repère d'angle θ défini par $\cot\theta = \frac{a-c}{b}$, on obtient une équation du même type où le terme en xy est nul, et une translation permet ensuite d'annuler les termes en x et y (si les termes correspondants en x^2 et y^2 sont non nuls)
Toute courbe Γ a donc une équation réduite du type : $AX^2 + CY^2 + F = 0$ avec $AC \neq 0$, ou $CY^2 + DX = 0$ avec $C \neq 0$, ou $AX^2 + EY = 0$ avec $A \neq 0$.
TH 2 : Γ est

- une ellipse ou l'ensemble vide si $\Delta = b^2 - 4ac = -4AC < 0$
- une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes si $\Delta = b^2 - 4ac = -4AC > 0$

- une parabole ou la réunion de deux droites parallèles si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

D20.
Exemple : $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$.

REM : On montre que la courbe Γ ci-dessus est une conique ou l'ensemble vide (autrement dit qu'elle ne dégénère pas en la réunion de deux droites) ssi

$$\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \neq 0$$