D) DÉTERMINANTS

I) PERMUTATIONS.

1) Groupe S_n.

DEF : On désigne par "groupe symétrique d'ordre n" l'ensemble des bijections de $E = \{1, 2, .., n\}$ dans lui-même, muni de la loi $\circ$; notation : S_n.
Ses éléments sont appelés des permutations.

RAPPEL : c'est bien un groupe, ayant $n!$ éléments.

PROP1 : pour toute permutation $\sigma \in S_n$ il existe un entier strictement positif p tel que $\sigma^p = id_E$.

D1

2) Décomposition d'une permutation en cycles. Orbites.

DEF 1: Une permutation $\sigma \in S_n$ est dite circulaire, ou est appelée "cycle" s'il existe une partie non vide ayant au moins deux éléments $A = \{k_1, k_2, .., k_p\}$ de $\{1, 2, .., n\}$ telle que

$$\sigma(k_i) = k_{i+1} \text{ pour } i = 1..p-1 \text{ et } \sigma(k_p) = k_1$$

La partie A est appelée le *support* du cycle, le nombre p son *ordre* ; un cycle d'ordre deux est appelé une *transposition.*

DEF 2 : σ étant une permutation $\in S_n$ et k un élément de $\{1, 2, .., n\}$, on désigne par "orbite de k sous l'action de σ" l'ensemble de toutes les images successives de k par σ. Les diverses orbites des éléments de $\{1, 2, .., n\}$ sous l'action de σ sont appelées les orbites de σ.

E1

PROP 2 : l'orbite de p est $\{\sigma^q(p) / q \in \mathbb{Z}\}$.

PROP 3: les différentes orbites de la permutation σ forment une partition de $\{1, 2, .., n\}$.

TH (de décomposition en cycles) :
Toute permutation différente de l'identité se décompose en produit commutatif de cycles de supports disjoints, de façon unique à l'ordre près.
Les supports de ces cycles sont les orbites non réduites à un point de la permutation.

3) Permutations paires et impaires. Signature d'une permutation.

LEMME : lorsqu'on compose une permutation avec une transposition, le nombre d'orbites change d'une unité.

Plus précisément, si les deux éléments de la transposition sont dans la même orbite, le nombre d'orbites augmente de 1, sinon, il diminue de 1.
D2

TH (de décomposition en transpositions) : toute permutation se décompose en un produit de transpositions. Cette décomposition n'est pas unique, mais la parité du nombre de transpositions est la même dans toutes les décompositions.

D3

DEF : Une permutation se décomposant en un nombre pair de transpositions est dite *paire*, sinon *impaire.*
La *signature* d'une permutation vaut 1 si elle est paire, -1 sinon.

PROP 4 :

$$\begin{aligned}
\text{paire} \circ \text{paire} &= \text{paire} \\
\text{paire} \circ \text{impaire} &= \text{impaire} \\
\text{impaire} \circ \text{paire} &= \text{impaire} \\
\text{impaire} \circ \text{impaire} &= \text{paire}
\end{aligned}$$

CORO : l'ensemble des permutations paires forme un sous-groupe de S_n, ayant $n!/2$ éléments.
D4

II) FORMES n-LINÉAIRES ANTISYMÉTRIQUES.

DEF : une *forme n-linéaire* sur E est une application f de E^n dans K telle que lorsqu'on fixe $n-1$ variables, l'application de E dans K obtenue est toujours linéaire, autrement dit

$$\boxed{\text{pour tout } i \ : \ f\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i}+\lambda\overrightarrow{x_i'},...,\overrightarrow{x_n}\right)=f\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)+\lambda f\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i'},...,\overrightarrow{x_n}\right)}$$

Lorsque l'on ne veut pas préciser l'entier n, on parle de forme multilinéaire.
Exemple : E1

DEF : f application de E^n dans K ; f est dite *antisymétrique* si, lorsqu'on échange deux vecteurs, l'image par f est changée en son opposé, autrement dit,

$$\boxed{\text{pour toute paire } \{i,j\} \quad f\left(\overrightarrow{x_1},....,\overrightarrow{x_{i-1}},\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_{i+1}},....,\overrightarrow{x_{j-1}},\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_{j+1}},....,\overrightarrow{x_n}\right)=-f\left(\overrightarrow{x_1},....,\overrightarrow{x_{i-1}},\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_{i+1}},....,\overrightarrow{x_{j-1}},\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_{j+1}},...,\overrightarrow{x_n}\right)}$$

PROP : si f est antisymétrique ssi pour tout $\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)$ et toute permutation σ de $\{1,..n\}$

$$f\left(\overrightarrow{x_{\sigma(1)}},..,\overrightarrow{x_{\sigma(i)}},...,\overrightarrow{x_{\sigma(n)}}\right)=\text{signature}\,(\sigma)\,.f\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)$$

Autrement dit, une permutation paire des vecteurs ne change pas la valeur de $f\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)$, une permutation impaire la change de signe.

PROP : si f est antisymétrique, lorsque deux vecteurs sont égaux, l'image par f est nulle :

$$f\left(\overrightarrow{x_1},....,\overrightarrow{x_{i-1}},\ \overrightarrow{x},\overrightarrow{x_{i+1}},....,\overrightarrow{x_{j-1}},\ \overrightarrow{x},\overrightarrow{x_{i+1}},....,\overrightarrow{x_n}\right)=0$$

On dit alors que f est *alternée.*
D5

Remarque : montrer en exercice que réciproquement, une forme multilinéaire alternée est antisymétrique.

PROP : Expression dans une base d'une forme $n-$linéaire antisymétrique en dimension n :

Données : $\dim E_n=n, \mathcal{B}=\left(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2,...,\overrightarrow{e}_n\right)$, $\quad \overrightarrow{x_j}\left|\begin{array}{l} a_{j1}\\ a_{j2}\\ ..\\ a_{jn}\end{array}\right._{/\mathcal{B}}$

Alors $f\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)=kf\left(\overrightarrow{e_1},..,\overrightarrow{e_i},...,\overrightarrow{e_n}\right)$ avec

$$k=\sum_{\sigma\in S_n}\text{signature}\,(\sigma)\,a_{\sigma(1)1}....a_{\sigma(n)n}$$

D6
DEF : le nombre k est le *déterminant* de $\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Notation : $k=\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)=\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n}\\ .. & & ..\\ a_{n1} & .. & a_{nn}\end{vmatrix}$

Cas : $n=3$: règle de Sarrus.

ATTENTION : la règle de Sarrus pour développer un déterminant n'est plus valable pour $n\geqslant 4$: en effet il y aurait par Sarrus $2n$ produits dans le développement, alors qu'en fait il y en a ......

Exemple : E2

III) Propriétés du déterminant d'un $n-$uplet de vecteurs dans une base en dimension n.

P1 : $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme $n-$linéaire antisymétrique sur E_n.
D7

P2 : si f est une forme $n-$linéaire antisymétrique sur E_n

$$f\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)=\det{}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)\ f\left(\overrightarrow{e_1},..,\overrightarrow{e_i},...,\overrightarrow{e_n}\right)$$

P3 (CORO DE P1 et P2) : si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on a la relation de type Chasles :

$$\det{}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)=\det{}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right)\ \det{}_{\mathcal{B}'}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)$$

D8
P4 (THÉORÈME FONDAMENTAL) : une famille de n vecteurs de E_n est libre ssi son déterminant dans une base de E_n est non nul, et il est alors non nul dans toute base de E_n :

$$\begin{array}{rl} & \boxed{1}\ \left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)\text{ est libre}\\ \Leftrightarrow & \boxed{2}\ \forall B \text{ base } \det{}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)\neq 0\\ \Leftrightarrow & \boxed{3}\ \exists B \text{ base telle que } \det{}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)\neq 0\end{array}$$

D9

IV) DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME.

LEMME : soit f un endomorphisme bijectif de E_n, $\mathcal{B}$ une base de E_n, alors

$$\det{}_{f(\mathcal{B})}\left(f\left(\overrightarrow{x_1}\right),..,f\left(\overrightarrow{x_i}\right),...,f\left(\overrightarrow{x_n}\right)\right)=\det{}_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)$$

PROP et DEF : étant donné un endomorphisme f de E_n, le nombre $\det_{\mathcal{B}}\left(f\left(\mathcal{B}\right)\right)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E_n choisie. Ce nombre est appelé le *déterminant* de l'endomorphisme f :

$$\det f=\det{}_{\mathcal{B}}\left(f\left(\mathcal{B}\right)\right)\quad\forall\mathcal{B}$$

D10 : en séparant les cas, f bijectif et f non bijectif.

PROPRIÉTÉS :

P1 : (THÉORÈME FONDAMENTAL) f est bijectif ssi son déterminant est non nul.
P2 : $\det_{\mathcal{B}}\left(f\left(\overrightarrow{x_1}\right),..,f\left(\overrightarrow{x_i}\right),...,f\left(\overrightarrow{x_n}\right)\right)=\det f\times\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{x_1},..,\overrightarrow{x_i},...,\overrightarrow{x_n}\right)\quad\forall\mathcal{B}$
P3 : $\det\ f\circ g=\det f.\det g=\det g\circ f$
P4 : si $f\in GL\left(E_n\right)$ $\det\left(f^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det f}$
P5 : $\det\left(\lambda f\right)=\lambda^n\det f$ mais rien sur $\det\left(f+g\right)$

D11

REM : on déduit de P3 et P1 que $f\circ g$ bijectif implique f et g bijectifs ; en particulier $f\circ g=id_E$ implique donc f inversible, et $g=f^{-1}$ (SANS QU'ON AIT BESOIN DE DÉMONTRER AUSSI QUE $g\circ f=id_E$).

V) DÉTERMINANT D'UNE MATRICE.
DEF : le déterminant d'une matrice d'ordre n est le déterminant de ses colonnes dans la base canonique de $M_{n,1}\left(K\right)$, autrement dit :

$$\det A\overset{def}{=}\det{}_{B_{can}}\left(C_1,C_2,...,C_n\right)=\begin{vmatrix}A\left(1,1\right) & .. & A\left(1,n\right)\\ .. & & ..\\ A\left(n,1\right) & .. & A\left(n,n\right)\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}\text{signature}\left(\sigma\right)A\left(\sigma\left(1\right),1\right)....A\left(\sigma\left(n\right),n\right)$$

REMARQUE : $\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right)=\det\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)$.

P1 : le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de n'importe laquelle de ses matrices :

$$\det f=\det\left(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)\quad\forall\mathcal{B}$$

D12

P2 : (THÉORÈME FONDAMENTAL) : une matrice carrée d'ordre n est inversible ssi son déterminant est non nul.

D13

P3 : le déterminant est un morphisme multiplicatif de $M_n(K)$ dans K :

$$\det AB=\det A\det B$$

Mais ATTENTION de ne pas écrire $\det(A+B)=\det A+\det B$!!!!

REM : on déduit de P3 et P2 que AB inversible implique A et B inversibles ; en particulier $AB=I_n$ implique donc A inversible, et $B=A^{-1}$ (SANS QU'ON AIT BESOIN DE DÉMONTRER AUSSI QUE $BA=I_n$).

APPLICATION : E3

P4 : si $A\in GL_n(K)$ $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$

P5 : $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$

D14

P6 : le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée :

$$\det A=\det\ \left({}^tA\right)$$

D15

P7 : (CORO direct de P1) le déterminant des lignes d'une matrice est le même que celui des colonnes :

$$\det_{B_{can}}(C_1,C_2,..,C_n)=\det_{B_{can}}(L_1,L_2,...,L_n)$$

P8 : le déterminant d'une matrice est donc $n-$linéaire, antisymétrique et alterné par rapport aux lignes et colonnes.

P9 : Si on ajoute à une colonne (resp. ligne) d'une matrice une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes), le déterminant ne change pas.

D16

VI) DÉVELOPPEMENT D'UN DETERMINANT PAR RAPPORT A UNE LIGNE OU UNE COLONNE.

DEF : on appelle *matrice mineure* de la place (i,j) la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j ; notation : A_{ij}

Son déterminant s'appelle le *mineur* de la place (i,j).

Multiplié par $(-1)^{i+j}$, ce mineur prend le nom de *cofacteur* de la place (i,j).

La matrice des cofacteurs s'appelle la comatrice de A ; notation :Com(A) : on a donc :

$$\operatorname{Com}(A)(i,j)=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

P10 : développement d'un déterminant par rapport à une ligne où une colonne :

Pour toute ligne ou colonne de la matrice A, le déterminant de A est égal à la somme des produits des termes de la ligne par les cofacteurs correspondants :

Développement suivant la ligne i : $\det A=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A(i,j)\det(A_{ij})$

Développement suivant la colonne j : $\det A=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A(i,j)\det(A_{ij})$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

VII) APPLICATIONS DU VI)

1) P11 : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

D17

APPLICATION de P9, P10 et P11 : on peut calculer le déterminant d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss (en faisant attention que si l'on multiplie une ligne ou une colonne par une constante non nulle, il faut diviser le déterminant par cette constante pour conserver sa valeur).

EXEMPLES : E4

REMARQUE : le calcul d'un déterminant d'ordre n par le pivot de Gauss est nettement plus rapide que par la formule $\sum\limits_{\sigma\in S_n}$ signature$(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}....a_{\sigma(n)n}$.

Dans le premier cas, cela nécessite environ $n^2 + (n-1)^2 + ... + 1 + n \sim \dfrac{n^3}{3}$ aditions ou multiplications, alors que dans le deuxième, cela en nécessite environ $n.n!$

(le premier algorithme est dit polynomial, et l'autre exponentiel)

2) Formule pour l'inverse d'une matrice.

Les formules de développement ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j=1}^{n} A(i,j)\,.\mathrm{Com}(A)(i,j) = \sum_{j=1}^{n} A(i,j)\,.\left({}^t\mathrm{Com}(A)\right)(j,i) = \left(A.{}^t\mathrm{Com}(A)\right)(i,i) \\
\det A &= \sum_{i=1}^{n} A(i,j)\,.\mathrm{Com}(A)(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \left({}^t\mathrm{Com}(A)\right)(j,i)\, A(i,j) = \left({}^t\mathrm{Com}(A)\,.A\right)(j,j)
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que dans les produits $A.{}^t\mathrm{Com}(A)$ et ${}^t\mathrm{Com}(A)\,.A$, les éléments diagonaux sont égaux à $\det(A)$; on démontre que les autres éléments sont nuls, d'où :

PROP : le produit d'une matrice carrée par la transposée de la matrice des cofacteurs est égal au déterminant de A fois la matrice identité :

$$\boxed{A.{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)\,.A = (\det A)\, I_n}$$

L'inverse d'une matrice carrée inversible estdonc la transposée de la comatrice divisée par le déterminant

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A)}$$

D18

REM : on retrouve : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

3) Formules de Cramer pour la résolution d'un système de Cramer.

On cherche à résoudre un système de Cramer :

$$AX = B$$

De matrice carrée d'ordre n inversible A et de second membre $B \in M_{n,1}(K)$ et d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}$.

PROP : la solution (unique) de ce système est donnée par les *formules de Cramer* :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

Où A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans A la $i$ème colonne par B.
D19

Exemple pour $n = 3$:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{array}\right. \quad \text{a pour solution : } \left(x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \right).$$

VIII) ORIENTATION D'UN $\mathbb{R}$-ESPACE VECTORIEL

DEF : E $\mathbb{R}$ ev de dim n, $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$ bases de E ; on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la *même orientation* si le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est positif, soit $\det_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B}'\right) > 0$.

PROP : ceci définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases de E, ayant exactement deux classes d'équivalence.

D20
DEF : orienter E, c'est choisir l'une de ces classes d'équivalence, dont les bases sont dites directes ; les autres bases sont dites indirectes.

EXEMPLES : E5.

DEF : un automorphisme u de E est dit *direct*, ou *positif* (ou encore *droit*) si son déterminant est > 0, *indirect* ou *négatif* (ou *gauche*) sinon.
Remarque : cette définition ne dépend pas de l'orientation de E.

EXEMPLES : E6.

PROP :

$$\begin{array}{rcl} \text{direct} \circ \text{direct} & = & \text{direct} \\ \text{direct} \circ \text{indirect} & = & \text{indirect} \\ \text{indirect} \circ \text{direct} & = & \text{indirect} \\ \text{indirect} \circ \text{indirect} & = & \text{direct} \end{array}$$

L'inverse d'un automorphisme direct (resp indirect) est direct (resp indirect).
D21
PROP : un endomorphisme de E est un automorphisme direct de E ss'il transforme une (resp. toute) base en une base de même orientation.
D22