

III) Notions sur les ensembles.

1) Généralités.

Un *ensemble* est une collection d'objets, appelés ses *éléments*, considérés sans ordre, ni répétition possible ; " x est élément de l'ensemble E " se dit aussi " x appartient à E ", ou " E contient x " et se note $x \in E$, ou $E \ni x$. (Le symbole \in vient de la lettre epsilon ϵ , première lettre du verbe *être* en grec).

On écrit un ensemble *en extension* en écrivant tous ses éléments entre des accolades ; par exemple :

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$$

Un ensemble sans élément est dit *vide* : notation : \emptyset ou $\{ \}$.

Un ensemble à un seul élément est appelé un *singleton*, un ensemble à deux éléments, une *paire*.

Etant donné un ensemble E , toute propriété P des éléments de E définit un *sous-ensemble*, (ou *partie*) de E , ensemble F des éléments de E ayant la propriété P ; on note

$$F = \{x \in E / P(x)\}$$

Un tel ensemble est dit défini *en compréhension*.

Par conséquent, pour un élément x de E , $x \in F$ équivaut à $P(x)$.

ABRÉVIATION IMPORTANTE : si f est une application de E vers F , l'ensemble

$$\{y \in F / \exists x \in E / y = f(x)\}$$

s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\{f(x) / x \in E\}$$

(lire : ensemble des $f(x)$ pour x décrivant E)

Exemples E1

L'ensemble des naturels pairs $\{n \in \mathbb{N} / \exists p \in \mathbb{N} / n = 2p\}$, s'écrit plus simplement sous la forme $\{2p / p \in \mathbb{N}\}$ ou encore $2\mathbb{N}$.

Écrire de la même façon l'ensemble des naturels impairs, l'ensemble \mathbb{D} des nombres décimaux, l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels, la courbe d'une fonction f (ensemble des points $M(x, y)$ du plan P vérifiant $y = f(x)$).

2) L'inclusion des ensembles.

DEF : un ensemble A est dit *inclus* dans un ensemble B si tout élément de A est aussi un élément de B ; on dit aussi que A est un *sous-ensemble* de B , ou une *partie* de B , ou encore que B *inclut* A :

$$A \subset B (\Leftrightarrow B \supset A) \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \in B$$

IMPORTANT : si A et B sont définis par des propriétés P et Q comme sous-ensembles de E , l'inclusion de A dans B équivaut à l'implication $P \Rightarrow Q$:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in E \quad P(x) \Rightarrow Q(x))$$

E2 : $y = x^2$ et $y^2 = x^4$

3) L'égalité des ensembles.

DEF : deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments ; l'égalité équivaut donc à la double inclusion :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

IMPORTANT : si A et B sont définis par des propriétés P et Q comme sous-ensembles de E , l'égalité de A et B équivaut à l'équivalence des propriétés P et Q :

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in E \quad P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

PROP : négation de l'inclusion et de l'égalité :

$A \not\subset B \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
$A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

4) Ensemble des parties d'un ensemble.

Notation : l'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$; il contient en particulier la partie vide \emptyset et la partie *pleine* E ; les autres parties sont dites *propres*.

On a donc l'équivalence importante :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

E3 : $\mathcal{P}(\emptyset) = \dots\dots\dots$; $\mathcal{P}(\{a\}) = \dots\dots\dots$; $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \dots\dots\dots$

Étant donné un ensemble E , on considérera souvent 3 niveaux :

- celui des éléments de E , notés par des petites lettres x, y , etc...
- celui des parties de E , incluses dans E (i.e. éléments de $\mathcal{P}(E)$), notées par des majuscules droites : $A = \{x, y\}$ etc...
- celui des ensembles de parties de E , inclus dans $\mathcal{P}(E)$ (i.e. éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$), notés par des majuscules arrondies : $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{x\}\}$ etc...

5) Opérations sur les ensembles.

Les ensembles ici considérés sont supposés être inclus dans un ensemble dit de référence E .

a) Complémentarisation.

DEF : le *complémentaire* d'un ensemble A (dans E) est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A .

$$C_E(A) = \{x \in E / x \notin A\}$$

Notation simplifiée, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence :

$$\bar{A} \text{ ou } {}^c A$$

Par conséquent

$$\forall x \in E \quad x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

La complémentarisation est aux ensembles ce que la négation est aux propriétés.

Diagramme de Venn V1

PROP : $\overline{\bar{A}} = A$

b) Réunion et intersection.

<p>DEF : la <i>réunion</i> de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ Par conséquent : $\forall x \in E \quad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$ La réunion est aux ensembles ce que la <i>disjonction</i> est aux propriétés.</p>	<p>DEF : l'<i>intersection</i> de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ Par conséquent : $\forall x \in E \quad x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$ L'intersection est aux ensembles ce que la <i>conjonction</i> est aux propriétés.</p>
---	---

Diagramme de Venn V2

P1 : (lois de Morgan)

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \dots\dots\dots \\ \overline{A \cap B} &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$

P2 : commutativité :

$$\begin{aligned}A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A\end{aligned}$$

P3 : associativité :

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \text{ (donc noté sans parenthèse)} \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \text{ (donc noté sans parenthèse)}\end{aligned}$$

P4 : distributivité mutuelle :

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup C &= \dots\dots\dots \\ (A \cup B) \cap C &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$

P5 :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \overline{A} \supset \overline{B}$$

D1

c) Différence.

DEF : la *différence* des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et pas à B .

$$A - B = A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Diagramme de Venn V3

d) (hors programme) Différence symétrique.

DEF : la *différence symétrique* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B mais pas à A et à B .

$$A \Delta B = \{x \in E / \text{soit } x \in A \text{ soit } x \in B\}$$

PROP :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

D2

Diagramme de Venn V4

Exercice : montrer que la différence symétrique est associative.

6) Réunion et intersection d'une famille d'ensembles.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , indexée par un ensemble I quelconque (la notion de famille sera vue ultérieurement).

DEF : la *réunion* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des A_i
 $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i \in I / x \in A_i\}$
 Par conséquent :
 $\forall x \in E \quad x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I / x \in A_i$

DEF : l'*intersection* des ensembles de la famille (A_i) est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_i
 $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I \quad x \in A_i\}$
 Par conséquent :
 $\forall x \in E \quad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I \quad x \in A_i$

$$E4 : \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[= \dots ; \bigcup_{n \geq 2} [\frac{1}{n}, 1] = \dots ; \bigcap_{n \geq 2}]-\frac{1}{n}, 1] = \dots$$

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup \dots ;$$

$$D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{ \dots / k \in \mathbb{Z} \} = \bigcup \dots$$

7) Ensembles disjoints et ensembles distincts.

DEF : deux ensembles sont dits *disjoints* quand leur intersection est vide, et *distincts* quand ils ne sont pas égaux.

REM : \emptyset est disjoint de lui-même, mais n'en est pas distinct ! A part ça, disjoint implique distinct.

PROP : A et B sont

disjoints	distincts
$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$	$\Leftrightarrow A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$
$\Leftrightarrow A \subset \overline{B}$	$\Leftrightarrow B \setminus A$ ou $A \setminus B$ est $\neq \emptyset$
$\Leftrightarrow B \subset \overline{A}$	\Leftrightarrow il existe un élément appartenant à l'un des ensembles et pas à l'autre

D3

8) Notion de partition (HORS PROGRAMME).

DEF : une *partition* d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E (les *composantes* de la partition), deux à deux disjointes dont la réunion est égale à E :

$$\mathcal{E} \text{ est une partition de } \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E) \\ 2. \forall A \in \mathcal{E} \quad A \neq \emptyset \\ 3. \forall A, B \in \mathcal{E} \quad A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset \\ 4. \bigcup_{A \in \mathcal{E}} A = E \end{cases}$$

E4

9) Notion de liste : couples, triplets, ..., n-uplets.

Une *liste*, ou *suite finie*, ou encore *famille finie* est une collection finie d'objets, appelés ses *éléments*, considérés avec ordre, et répétitions possibles.

Le nombre d'éléments de la liste s'appelle sa *taille* ou son *ordre*;

$$\text{les listes de taille } \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \dots \\ n \end{cases} \text{ sont des } \begin{cases} \text{couples} \\ \text{triplets} \\ \text{quadruplets} \\ \text{quintuplets} \\ \dots \\ n\text{-uplets (ou parfois } n\text{-listes)} \end{cases}$$

On peut définir les listes à partir de la notion d'ensemble de la façon suivante :

2)	$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
3)	$(x, y, z) = ((x, y), z)$
...	
n)	$(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$

L'écriture de la liste (a_1, \dots, a_n) est parfois abrégée en $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$; a_i est appelé la *i*-ème *coordonnée* de la liste.

L'égalité de deux n-uplets se traduit comme suit :

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \forall i \in [1, n] \quad x_i = y_i$$

Étant donnés n ensembles E_1, \dots, E_n l'ensemble de tous les n-uplets dont la *i*-ème coordonnée est un élément de E_i s'appelle le *produit cartésien* des ensembles E_1, \dots, E_n , en l'honneur de Descartes qui a le premier dégagé la notion de coordonnée :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \text{ (ou } \prod_{i=1}^n E_i) = \{(x_1, \dots, x_n) / \forall i \in [1, n] \quad x_i \in E_i\}$$

$\overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{n \text{ fois}}$ est abrégé en E^n .

Exemples : $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{\dots\dots\dots\}$

hachurer $([0, 1] \cup [2, 3]) \times [0, 3]$

IV) Ensembles finis, dénombrements.

1) Taille (ou cardinal) d'un ensemble fini.

a) Définitions.

DEF : on dit qu'un ensemble est de *taille* (ou *cardinal*, ou, plus prosaïquement *nombre d'éléments*) $n \in \mathbb{N}$ s'il est vide quand $n = 0$, ou s'il est en bijection avec $[1, n]$ sinon.

(La notion de bijection sera étudiée ultérieurement)

PROP : le nombre n défini ci-dessus est unique ; on utilise les notations $n = |E| = \text{Card}(E) = \#(E)$, ou l'on dit que E est un n -ensemble.

DEF : un ensemble ayant une taille finie est dit *fini*, *infini* sinon.

b) Propriétés de la taille d'un ensemble fini.

Ici A, B, C désignent des ensembles finis.

P1 : deux ensembles fini ont même taille si et seulement s'ils sont en bijection :

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \text{Bij}(A, B) \neq \emptyset$$

P2 : la taille d'une partie est inférieure ou égale à la taille du tout :

$$A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$$

(réciproque fausse bien sur).

P3 : deux ensembles finis ayant la même taille et inclus l'un dans l'autre sont égaux :

$$A \subset B \text{ et } |A| = |B| \Rightarrow A = B$$

REM : cette propriété, très utile, est fausse pour des ensembles infinis : par exemple,

$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}, \mathbb{N}^* \text{ est en bijection avec } \mathbb{N}, \text{ mais } \mathbb{N}^* \neq \mathbb{N} !!$$

P4 : la réunion de deux ensembles finis est un ensemble fini, et

$$|A \cup B| = |A| + |B| - \dots\dots\dots$$

D4 (partielle).

Application : calculer $|A \cup B \cup C|$ en fonction des tailles de $A, B, C, A \cap B$ etc...

Généralisation : formule de Poincaré donnant la taille de $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

E5

2) Dénombrements classiques.

a) Nombre de parties d'un ensemble.

Exemples :

$$|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\dots\}| = \dots\dots\dots ; |\mathcal{P}(\{a\})| = |\{\dots\dots\dots\}| = \dots\dots\dots ; |\mathcal{P}(\{a, b\})| = |\{\dots\dots\dots\}| = \dots\dots\dots$$

Lemme 1: dans un ensemble fini, il y a autant de parties contenant un élément donné que de parties ne le contenant pas.

Lemme 2 : si $x_0 \in E$ fini, $|\mathcal{P}(E)| = 2|\mathcal{P}(E \setminus \{x_0\})|$.

TH : un ensemble à n élément possède parties :

$$|\mathcal{P}(E)| = \dots\dots\dots$$

D5

b) Dénombrements de produits cartésiens.

P1 : si E et F sont finis, $|E \times F| = \dots\dots$

CORO 1: $|E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n| = \dots\dots\dots$

CORO 2 : $|E^n| = \dots\dots\dots$

c) Regroupements d'ordre p d'éléments d'un ensemble E ayant n éléments.

	avec ordre	sans ordre												
avec répétitions possibles	<table border="1"> <tr> <td>noms :</td> <td> $\left\{ \begin{array}{l} \text{liste de taille } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ liste d'éléments de } E \\ p - \text{ uplet d'éléments de } E \end{array} \right.$ </td> </tr> <tr> <td>ensemble :</td> <td>E^p</td> </tr> <tr> <td>nombre :</td> <td>$E^p = \dots\dots\dots$</td> </tr> </table>	noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{liste de taille } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ liste d'éléments de } E \\ p - \text{ uplet d'éléments de } E \end{array} \right.$	ensemble :	E^p	nombre :	$ E^p = \dots\dots\dots$	<table border="1"> <tr> <td>noms :</td> <td> $\left\{ \begin{array}{l} \text{combinaison avec répétitions} \\ \text{d'ordre } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ combinaison avec répétition} \\ \text{d'éléments de } E \end{array} \right.$ </td> </tr> <tr> <td>ensemble :</td> <td></td> </tr> <tr> <td>nombre :</td> <td>hors programme</td> </tr> </table>	noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{combinaison avec répétitions} \\ \text{d'ordre } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ combinaison avec répétition} \\ \text{d'éléments de } E \end{array} \right.$	ensemble :		nombre :	hors programme
noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{liste de taille } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ liste d'éléments de } E \\ p - \text{ uplet d'éléments de } E \end{array} \right.$													
ensemble :	E^p													
nombre :	$ E^p = \dots\dots\dots$													
noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{combinaison avec répétitions} \\ \text{d'ordre } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ combinaison avec répétition} \\ \text{d'éléments de } E \end{array} \right.$													
ensemble :														
nombre :	hors programme													
sans répétition	<table border="1"> <tr> <td>noms :</td> <td> $\left\{ \begin{array}{l} \text{liste de taille } p \text{ d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ liste d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ uplet d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ arrangement d'éléments de } E \end{array} \right.$ </td> </tr> <tr> <td>ensemble :</td> <td>$\mathcal{L}_p(E)$</td> </tr> <tr> <td>nombre :</td> <td>$\mathcal{L}_p(E) = \dots\dots = \dots\dots\dots =$</td> </tr> </table>	noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{liste de taille } p \text{ d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ liste d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ uplet d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ arrangement d'éléments de } E \end{array} \right.$	ensemble :	$\mathcal{L}_p(E)$	nombre :	$ \mathcal{L}_p(E) = \dots\dots = \dots\dots\dots =$	<table border="1"> <tr> <td>noms :</td> <td> $\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-ensemble de taille } p \text{ de } E \\ p - \text{ sous-ensemble de } E \\ \text{partie de taille } p \text{ de } E \\ p - \text{ partie de } E \\ \text{combinaison d'ordre } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ combinaison d'éléments de } E \end{array} \right.$ </td> </tr> <tr> <td>ensemble :</td> <td>$\mathcal{P}_p(E)$ (ou $\binom{E}{p}$)</td> </tr> <tr> <td>nombre :</td> <td>$\mathcal{P}_p(E) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$</td> </tr> </table>	noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-ensemble de taille } p \text{ de } E \\ p - \text{ sous-ensemble de } E \\ \text{partie de taille } p \text{ de } E \\ p - \text{ partie de } E \\ \text{combinaison d'ordre } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ combinaison d'éléments de } E \end{array} \right.$	ensemble :	$\mathcal{P}_p(E)$ (ou $\binom{E}{p}$)	nombre :	$ \mathcal{P}_p(E) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{liste de taille } p \text{ d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ liste d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ uplet d'éléments distincts de } E \\ p - \text{ arrangement d'éléments de } E \end{array} \right.$													
ensemble :	$\mathcal{L}_p(E)$													
nombre :	$ \mathcal{L}_p(E) = \dots\dots = \dots\dots\dots =$													
noms :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sous-ensemble de taille } p \text{ de } E \\ p - \text{ sous-ensemble de } E \\ \text{partie de taille } p \text{ de } E \\ p - \text{ partie de } E \\ \text{combinaison d'ordre } p \text{ d'éléments de } E \\ p - \text{ combinaison d'éléments de } E \end{array} \right.$													
ensemble :	$\mathcal{P}_p(E)$ (ou $\binom{E}{p}$)													
nombre :	$ \mathcal{P}_p(E) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$													

Démonstration de ces divers dénombrements : D5

c) Listes à deux objets (pile ou face).

PROP 1 : le nombre de listes de taille n faisant intervenir deux objets au plus (= le nombre de résultats d'une succession de n jeux de pile ou face) vaut

.....

PROP 2 : le nombre de listes de taille n faisant intervenir p fois un objet et $n - p$ fois un autre (= le nombre de résultats d'une succession de n jeux de pile ou face avec p piles) vaut

.....

D6

d) Résumé des propriétés des coefficients binomiaux.

Diverses définitions équivalentes.

DEF 1. Définition par récurrence	a. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
	b. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in [[1, n]] \quad \binom{n+1}{p} = \dots\dots\dots$
DEF 2. Définition binomiale	$\binom{n}{p}$ est le coefficient de $a^{n-p}b^p$ dans $(a+b)^n$
DEF 3. Définition calculatoire	$\binom{n}{p} = \dots\dots\dots$
DEF 4. Définition combinatoire 1	$\binom{n}{p}$ est le nombre de $\dots\dots\dots$
DEF 5. Définition combinatoire 2	$\binom{n}{p}$ est le nombre de $\dots\dots\dots$

Nous sommes partis de la DEF 1 et avons démontré les caractérisations 2, 3, 4, 5.

Montrons que la DEF 4 entraîne la 2 (démonstration combinatoire de la formule du binôme).

D7

Redémontrons de manière combinatoire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, puis que $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

D8

Montrons que la DEF 4 entraîne la 1 (démonstration combinatoire de la relation de Pascal).

D9