

VI PRODUIT MIXTE ET PRODUIT VECTORIEL

1) Produit mixte

PROP et DEF: E esp. vect. euclidien orienté de dimension $n = 2$ (E est alors noté P) ou 3 (E est alors noté E_3).

Une famille de n vecteurs de E a même déterminant dans toute base orthonormée directe ; ce déterminant est appelé le *produit mixte* des vecteurs de la famille.

Notation : $\det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ ou $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$.

D1

REMARQUE : si on change l'orientation de E , le produit mixte est changé en son opposé.

PROP : soient dans P , \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls, $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta \in]2\pi]$; alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$$

Application à la détermination de l'angle d'une rotation :

Si \vec{u} est un vecteur unitaire de P , l'angle θ d'une rotation r est défini modulo 2π par

$$\begin{cases} \cos \theta = (\vec{u} | r(\vec{u})) \\ \sin \theta = \det(\vec{u}, r(\vec{u})) \end{cases}$$

D2

2) Produit vectoriel dans E_3

LEMME DE RIESZ : pour toute forme linéaire φ sur E , il existe un unique vecteur \vec{n} tel que

$$\forall \vec{x} \in E \quad \varphi(\vec{x}) = (\vec{n} | \vec{x})$$

et \vec{n} est un vecteur orthogonal au noyau de φ (qui est un hyperplan si $\varphi \neq 0$).

D3

DÉFINITION DU PRODUIT VECTORIEL

Soient \vec{u} et \vec{v} de E_3 ; l'application de E_3 dans \mathbb{R} définie par $\vec{x} \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$ étant linéaire, il existe un unique vecteur \vec{n} tel que $\forall \vec{x} \in E_3 \quad \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}) = (\vec{n} | \vec{x})$; ce vecteur \vec{n} est par définition le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$; on a donc

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E_3 \quad (\vec{w} | \vec{x}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$$

REMARQUE : si on change l'orientation de E_3 , le produit vectoriel est changé en son opposé.

PROPRIÉTÉS

P1 :

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{w}) &= \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \\ &= (\vec{v} \wedge \vec{w} | \vec{u}) = \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) \\ &= (\vec{w} \wedge \vec{u} | \vec{v}) = \det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

Ceci justifie l'appellation "produit mixte".

P2 : le produit vectoriel est une application bilinéaire antisymétrique de E_3^2 dans E_3 :

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \lambda \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \end{aligned}$$

P3 : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et \vec{v} .

P4 : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v})$ est liée.

$$\text{P5 : si } \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{u}' \\ x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ dans une base orthonormée directe, alors } \vec{u} \wedge \vec{u}' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \\ x & x' \\ x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

P6 : double produit vectoriel

$$\begin{aligned} (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} &= (\vec{u} | \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} | \vec{w}) \vec{u} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= (\vec{u} | \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} | \vec{v}) \vec{w} \end{aligned}$$

P7 : relation de Lagrange :

$$(\vec{u} | \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$$

P8 : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ où θ est la mesure de l'angle non orienté (\vec{u}, \vec{v}) .

P9 : (\vec{u}, \vec{v}) libre $\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ base directe de E_3 .

P10 : si (\vec{u}, \vec{v}) libre, θ la mesure de l'angle non orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et \vec{n} vecteur unitaire directement orthogonal à (\vec{u}, \vec{v}) (c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) > 0$), alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \vec{n}$$

P11 : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe de E ssi

$$(\vec{u}, \vec{v}) \text{ est orthonormée et } \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

D4

VII AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX (ou ISOMÉTRIES) en dimension 3.

1) Classification.

LEMME 1 : l'orthogonal d'un sev stable est stable, plus précisément : soit F un sev de E esp vect euclidien, stable par une isométrie $f \in O(E)$ (i.e. $f(F) \subset F$), alors

1. $f(F) = F$
2. $f(F^\perp) = F^\perp$
3. $f|_F$ et $f|_{F^\perp}$ sont des isométries

D5

LEMME 2 : si $f \in O(E)$, l'ensemble des vecteurs invariants par $f : \text{Inv}(f) = \ker(f - id)$ est stable par f , ainsi que l'ensemble des vecteurs anti-invariants $\text{Inv}^-(f) = \ker(f + id)$ et ces deux sev sont orthogonaux.

D6

On peut donc écrire $E = \text{Inv}(f) \oplus \text{Inv}^-(f) \oplus F$

LEMME 3 : la dimension de F défini ci-dessus est paire.

D7

On en déduit la classification des isométries de E_3 :

$Inv(f)$	$Inv^-(f)$	F	nature de f
E_3	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	$f = id, f \in O^+(E_3)$ matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
P	D	$\{\vec{0}\}$	f est une réflexion de base $P, f \in O^-(E_3)$ matrice réduite $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
D	P	$\{\vec{0}\}$	f est un retournement d'axe $D, f \in O^+(E_3)$ matrice réduite $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
D	$\{\vec{0}\}$	P	f est une rotation propre d'axe $D, f \in O^+(E_3)$ matrice réduite $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ $\theta \in]0, \pi[$
$\{\vec{0}\}$	E_3	$\{\vec{0}\}$	$f = -id, f \in O^-(E_3)$ matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\{\vec{0}\}$	D	P	f est une antirotation propre d'axe $D, f \in O^-(E_3)$ matrice réduite $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ $\theta \in]0, \pi[$

D8

COROLLAIRE :

f est une isométrie positive de E_3	
$\Leftrightarrow f$ est une rotation	
\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une base orthonormée dans laquelle } f \text{ a pour matrice } \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(\theta = 0 : id, \theta = \pi : \text{retournement}, \theta \in]0, \pi[: \text{rotation propre})$
\Leftrightarrow l'ensemble des vecteurs invariants est de dimension impaire	

f est une isométrie négative de E_3	
$\Leftrightarrow f$ est une antirotation	
\Leftrightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une base orthonormée dans laquelle } f \text{ a pour matrice } \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $(\theta = 0 : \text{réflexion}, \theta = \pi : -id, \theta \in]0, \pi[: \text{antirotation propre})$
\Leftrightarrow l'ensemble des vecteurs invariants est de dimension paire	

D9

2) Définition de l'angle d'une rotation ou d'une antirotation f , d'axe D .

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ étant choisi sur D , on oriente $P = D^\perp$ en disant que (\vec{i}, \vec{j}) est directe si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{n})$ est directe.

Par définition, l'angle θ de la rotation (ou de l'antirotation) est celui de sa restriction à P .

On dit alors que f est la rotation (ou antirotation) autour de \vec{n} et d'angle θ .

REMARQUE : si on change \vec{n} en $-\vec{n}$, θ est changé en $-\theta$; on peut donc toujours se ramener à $\theta \in [0, \pi]$.

PROP 1 : $\text{tr}(f) = 2 \cos \theta + 1$ pour une rotation, $2 \cos \theta - 1$ pour une antirotation.

D10

Ceci détermine θ en valeur absolue ; pour obtenir son signe utiliser la

PROP 2 : si \vec{u} n'appartient pas à D , $\det(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{n})$ a même signe que $\sin \theta$.

D11

Pour l'angle, on peut aussi utiliser :

PROP 3 : si f est une rotation ou antirotation de E_3 autour de \vec{n} (*unitaire*), et \vec{u} un vecteur *unitaire* orthogonal à l'axe, son angle θ est défini par :
$$\begin{cases} \cos \theta = (f(\vec{u}) | \vec{u}) \\ \sin \theta = \det(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{n}) \end{cases}$$

REMARQUES :

1. L' antirotation autour de \vec{n} et d'angle θ est la composée commutative de la rotation autour de \vec{n} et d'angle θ et de la réflexion par rapport à D^\perp , d'où le nom parfois donné de rotation-réflexion.

2. f est une antirotation autour de \vec{n} et d'angle θ ssi $-f$ est une rotation autour de \vec{n} et d'angle $\theta + \pi$.

D12

3) Composées de retournements et de réflexions.

Remarque : retournement (ou demi-tour, ou encore renversement) d'axe D = rotation d'angle π et d'axe D = symétrie orthogonale de base (ou d'image, ou par rapport à) D .

P1 : soient D_1 et D_2 deux droites de E_3 faisant un angle $\varphi \in [0, \pi/2]$ (ce qui signifie que θ est l'angle non orienté entre $\vec{u}_1 \in D_1$ et $\vec{u}_2 \in D_2$), et s_{D_1} et s_{D_2} les retournements associés ; alors $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la rotation d'angle 2φ autour de $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

D13

CORO : toute rotation vectorielle de E_3 se décompose en produit de deux retournements dont les axes sont orthogonaux à l'axe de la rotation, l'un d'entre eux pouvant être choisi arbitrairement.

D14

P2 : soient P_1 et P_2 deux plans de E_3 , se coupant en D , faisant un angle $\varphi \in [0, \pi/2]$ (ce qui signifie que φ est l'angle non orienté entre $\vec{u}_1 \in D^\perp \cap P_1$ et $\vec{u}_2 \in D^\perp \cap P_2$), et s_{P_1} et s_{P_2} les réflexions associées ; alors $s_{P_2} \circ s_{P_1}$ est la rotation d'angle 2φ autour de $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

D15

CORO : toute rotation vectorielle de E_3 se décompose en produit de deux réflexions dont les plans contiennent l'axe de la rotation, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement.

D16

On en déduit que toute isométrie de E_3 est produit d'au plus trois réflexions.

D17