Dans tout le cours d'algèbre linéaire, K est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les éléments de K seront parfois appelés les "scalaires" (du latin scala "échelle").

A) ESPACES VECTORIELS

I) GÉNÉRALITÉS

1) Définition.

DEF : soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée additivement, et d'une loi de composition externe à opérateurs dans le corps K, c'est à dire une application : $\begin{cases} K \times E \to E \\ (\lambda, \overrightarrow{x}) \mapsto \lambda \overrightarrow{x} \end{cases}$, notée multiplicativement.

On dit que $(E, +, \times)$ est un K-*espace vectoriel* (ou un espace vectoriel *sur le corps* K) si sont vérifiées les propriétés suivantes :

1.	$(E, +)$ est un groupe commutatif (4 propriétés ; l'élément nul est noté $\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{0}_E$ et appelé le *vecteur nul*)
2.	a. Pseudo-associativité : $\forall \lambda, \mu \in K\ \ \forall \overrightarrow{x} \in E\ \ \lambda (\mu \overrightarrow{x}) = (\lambda\mu) \overrightarrow{x}$ (noté donc $\lambda\mu \overrightarrow{x}$)
	b. Pseudo-distributivité à droite de $\times$ sur $+$: $\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \overrightarrow{x} \in E\ \ (\lambda + \mu) \overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{x}$
	c. Pseudo-distributivité à gauche de $\times$ sur $+$: $\forall \lambda \in K\ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E\ \ \lambda(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}$
	d. 1_K est un pseudo-élément unité : $\forall \overrightarrow{x} \in E\ \ 1_K \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

REM : les éléments de E sont appelés des *vecteurs*, par opposition à ceux de K, appelés *scalaires* ; nous avons mis des flèches sur les vecteurs pour éviter des confusions, mais ce n'est nullement indispensable.

2) Premières propriétés.

P1 (pseudo-intégrité) :

$$\boxed{\forall \lambda \in K\ \forall \overrightarrow{x} \in E\quad \lambda \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0_K \text{ ou } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}}$$

P2 (rapports entre les opposés et la loi externe) :

$$\boxed{\forall \lambda \in K\ \forall \overrightarrow{x} \in E\quad \lambda (-\overrightarrow{x}) = (-\lambda) \overrightarrow{x} = -(\lambda \overrightarrow{x}) \text{ (noté donc } -\lambda \overrightarrow{x})}$$

P3

Pseudo-distributivité à droite de $\times$ sur $-$: $\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \overrightarrow{x} \in E\ \ (\lambda - \mu) \overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x} - \mu \overrightarrow{x}$
Pseudo-distributivité à gauche de $\times$ sur $-$: $\forall \lambda \in K\ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E\ \ \lambda(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = \lambda \overrightarrow{x} - \lambda \overrightarrow{y}$

D1

3) Exemples.

E1

REM : tous les exemples donnés se ramènent en fait à un seul : l'ensemble K^I des applications d'un ensemble I dans K.

Si la notation des applications est, comme d'habitude, fonctionnelle, l'addition et la multiplication externe dans K^I sont définies, pour $f, g \in K^I$ et $\lambda \in K$ par :

1. $\forall x \in I\ \ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $\forall x \in I\ \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Mais si on utilise une notation indicielle (on parle alors de famille d'éléments de K indexée par I), elles sont définies pour $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I} \in K^I$ et $\lambda \in K$ par

1. $(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$
2. $\lambda (x_i)_{i \in I} = (\lambda x_i)_{i \in I}$

Malgré les apparences, les deux définitions ci-dessus sont rigoureusement les mêmes.

Lorsque

$I = \{1\}$, on retrouve "moralement" K
$I = [|1, n|]$, on retrouve "moralement" K^n
$I = [|1, n|] \times [|1, p|]$ on retrouve l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
$I = \mathbb{N}$, on retrouve l'ensemble des suites d'éléments de K
I est une partie de $K = \mathbb{R}$, on retrouve l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition I.

4) Produit d'espaces vectoriels.

PROP : le produit cartésien de 2 K-espaces vectoriels E et F, munis des lois $+$ et $\times$ définies par

$$\boxed{\begin{array}{l} (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + \left(\overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}\right) = \left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y'}\right) \\ \hline \lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\lambda\overrightarrow{x}, \lambda\overrightarrow{y}) \end{array}}$$

est un K-espace vectoriel.
D2

Ceci se généralise donc aux produits d'un nombre fini de K - espaces vectoriels, et donc au produit E^n de l'espace E n fois par lui-même.

Le cas général est le produit d'une famille quelconque de K-espaces vectoriels, indexée par un ensemble I :

$$\prod_{i \in I} E_i = \left\{(\overrightarrow{x}_i)_{i \in I} \ / \ \forall i \in I \ \overrightarrow{x}_i \in E_i\right\}$$

les lois $+$ et $\times$ étant définies par

$$\boxed{\begin{array}{l} (\overrightarrow{x}_i)_{i \in I} + (\overrightarrow{y}_i)_{i \in I} = (\overrightarrow{x}_i + \overrightarrow{y}_i)_{i \in I} \\ \hline \lambda(\overrightarrow{x}_i)_{i \in I} = (\lambda\overrightarrow{x}_i)_{i \in I} \end{array}}$$

II) SOUS-ESPACES VECTORIELS

1) Partie stable pour la loi externe.

DEF : une partie F d'un K - espace vectoriel E est dite *stable* pour la loi externe si

$$\forall \lambda \in K \ \forall \overrightarrow{x} \in F \ \ \lambda\overrightarrow{x} \in F$$

Dans ce cas, on peut définir la loi externe $\times_F$ dans l'ensemble F, dite "induite" par $\times$ sur F, par :

$$\forall \lambda \in K \ \forall \overrightarrow{x} \in F \quad \lambda \times_F \overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$$

Une partie stable pour la loi externe est parfois appelée un *cône vectoriel* de E.

2) Définition d'un sous-espace vectoriel.

DEF : une partie F d'un K - espace vectoriel E est appelée un *sous-K-espace vectoriel* (sev en abrégé) de E si elle est stable pour l'addition et la multiplication externe, et que munie des deux lois induites, elle est un K-espace vectoriel.

CNS : pour qu'une partie F d'un K - espace vectoriel E en soit un sous-espace vectoriel, il faut et il suffit qu'elle soit stable pour l'addition et la multiplication externe et contienne le vecteur nul, c'est-à-dire :

1. $\overrightarrow{0} \in F$
2. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F \ \ \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$ (stabilité pour $+$; on peut aussi écrire : $F + F \subset F$)
3. $\forall \lambda \in K \ \forall \overrightarrow{x} \in F \ \ \lambda\overrightarrow{x} \in F$ (stabilité pour $\times$ externe ; on peut aussi écrire : $KF \subset F$)

D3

Remarque : on peut réduire les propriétés 2. et 3. en une seule:

$$\boxed{[23]. \ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in F \ \forall \lambda \in K \quad \overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} \in F \text{ (soit } F + KF \subset F)}$$

D4

3) Exemples

Il y a toujours $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et E, appelés les sev *triviaux*, les autres étant dit *propres*.

PROP : le K-espace vectoriel K ne possède pas d'autres sev que les sev triviaux.

D5
Autres exemples E2.

4) Intersection de sous-espaces vectoriels.

PROP : l'intersection de deux sous espaces vectoriels de E est un sev de E.
D6

Généralisation : l'intersection d'une famille quelconque $(E_i)_{i\in I}$ de sev de E, à savoir

$$\bigcap_{i\in I} E_i = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ \forall i \in I \ \overrightarrow{x} \in E_i\}$$

est un sev de E.
D7

CORO : l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à p inconnues HOMOGÈNE, est un sous-espace vectoriel de K^p.

5) Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

DEF : si F et G sont deux sev de E, on définit la *somme* de F et G par

$$F+G = \left\{\overrightarrow{x} \in E \ / \ \boxed{\exists(\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}) \in F\times G \ / \ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}}\right\} = \{\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z} \ / \ \overrightarrow{y} \in F \text{ et } \overrightarrow{z} \in G\}$$

PROP : la somme de deux sev de E est un sev de E.

D8

Attention : la *réunion* de deux sev n'est en général pas un sev !

Généralisation : la somme d'une famille finie $(F_k)_{k=1..p}$ de sev, à savoir

$$F_1+\ldots+F_p = \sum_{k=1}^{p} F_k = \left\{\sum_{k=1}^{p} \overrightarrow{x}_k \ / \ \forall k \in [|1,p|] \ \overrightarrow{x}_k \in F_k\right\}$$

est un sev de E.

III) SOUS-ESPACES AFFINES D'UN ESPACE VECTORIEL.

DEF : On dit qu'une partie H de E est un sous-espace *affine* de E s'il existe un sous-espace vectoriel F et un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que

$$H = \overrightarrow{u}+F = \{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{x} \ / \ \overrightarrow{x} \in F\}$$

REM 1 : le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient alors à H et d'ailleurs H est égal à $\overrightarrow{u}+F$ quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$ de F.

REM 2 : la condition s'écrit aussi

$$\exists \overrightarrow{u} \in H \ / \ H-\overrightarrow{u} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$

REM 3 : le sous-espace vectoriel F est unique (c'est $H-H = \{\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y} \ / \ \overrightarrow{x},\overrightarrow{y} \in H\}$: on l'appelle la direction du sous-espace affine H.

E3

DEF : on dit que deux sous-espaces affines sont parallèles (au sens strict) s'ils ont la même direction.

CNS :

$$H \parallel H' \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{u} \in E \ \ / \ \ H' = H + \overrightarrow{u}$$

IV) COMBINAISONS LINÉAIRES. SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR UNE FAMILLE FINIE DE VECTEURS.

DEF : soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) = (\overrightarrow{x}_i)_{i=1..p}$ une famille finie de p vecteurs du K-espace vectoriel E et $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in K^p$ une famille de p scalaires ; la *combinaison linéaire* de $\mathcal{F}$ de coefficients $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ est le vecteur $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x}_i$. Lorsque les coefficients sont nuls, la combinaison linéaire est dite *triviale*.

Exemples E3 bis.

PROP et DEF : l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le sous espace vectoriel *engendré* par $\mathcal{F}$ (ou par les $\overrightarrow{x}_i, i = 1..p$) ; notation :

$$\operatorname{vect} \mathcal{F} = \operatorname{vect} (\overrightarrow{x}_i)_{i=1..p} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x}_i \ / \ \forall i \in [|1, p|] \ \ \lambda_i \in K \right\}$$

Par convention, le sous-espace vectoriel engendré par une famille vide est le sous-espace réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$:

$$\operatorname{vect} \emptyset = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

D9

REM 1 : lorsque $\mathcal{F}$ n'est constituée que d'un vecteur $\overrightarrow{x}$, $\operatorname{vect}(\overrightarrow{x}) = \{\lambda \overrightarrow{x} \ / \ \ \lambda \in K\}$ est aussi noté $K\overrightarrow{x}$; on verra plus loin que si $\overrightarrow{x}$ est non nul, c'est une droite, c'est pourquoi on l'appelle dans ce cas "la droite engendrée par $\overrightarrow{x}$", ou encore "la droite dirigée par $\overrightarrow{x}$".

REM 2 : $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ n'est autre que la somme des sous-espaces engendrés par chacun des $\overrightarrow{x}_i$:

$$\operatorname{vect} (\overrightarrow{x}_i)_{i=1..p} = K\overrightarrow{x}_1 + ... + K\overrightarrow{x}_p$$

ceci montre que $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ est bien un sev, puisqu'on sait que les $K\overrightarrow{x}_i$ en sont et qu'une somme de sev est un sev.
(attention, ne pas confondre $K\overrightarrow{x} + K\overrightarrow{y}$ et $K(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$!!!)

REM 3 : un vecteur $\overrightarrow{x}$ est un élément de $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ ss'il est combinaison linéaire des $\overrightarrow{x}_i, i = 1..p$; on écrira en abrégé :

$$\boxed{\overrightarrow{x} \in \operatorname{vect} \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \operatorname{cl}(\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p)}$$

REM 4 : un sous-espace vectoriel est toujours stable par combinaisons linéaires (c'est-à-dire que toute combinaison linéaire d'éléments d'un sev est encore un élément de ce sev).

V) Dépendance linéaire.

Notation "tchèche" : par convention, on écrira $\left(\overrightarrow{x}_1, ..., \overset{\vee}{\overrightarrow{x}_{i_0}}, ..., \overrightarrow{x}_p\right)$ pour la famille de $p-1$ vecteurs $(\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_{i_0-1}, \overrightarrow{x}_{i_0+1} ..., \overrightarrow{x}_p)$ (il y a un vecteur de moins à écrire !).

DEF : une famille finie de vecteurs est dite *liée* (ou qu'elle est formée de vecteurs *linéairement dépendants*) lorsque l'un des vecteurs appartient au-sous-espace vectoriel engendré par les autres ; autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est liée} \Leftrightarrow \exists i_0 \in [|1, p|] \ \ / \ \overrightarrow{x}_{i_0} \in \operatorname{vect}\left(\overrightarrow{x}_1, ..., \overset{\vee}{\overrightarrow{x}_{i_0}}, ..., \overrightarrow{x}_p\right)}$$

Lorsque $p \geqslant 2$, cela signifie que l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres ; autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est liée} \Leftrightarrow \exists i_0 \in [|1, p|] \ \ \exists \left(\lambda_1, ..., \overset{\vee}{\lambda_{i_0}}, ..., \lambda_p\right) \in K^{p-1} \ / \ \overrightarrow{x}_{i_0} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ i \neq i_0}} \lambda_i \overrightarrow{x}_i}$$

soit, en simplifié :

$$\boxed{\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est liée} \Leftrightarrow \exists i_0 \in [|1, p|] \ \ / \ \overrightarrow{x}_{i_0} = \text{cl}\left(\overrightarrow{x}_1, ..., \overset{\vee}{\overrightarrow{x}}_{i_0}, ..., \overrightarrow{x}_p\right)}$$

En abrégé, on dit aussi que les $\overrightarrow{x}_i$ sont linéairement dépendants, ou qu'ils sont liés.
Exemples :
- $(\overrightarrow{x})$ est liée ssi $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
- $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est liée ssi $\exists \lambda \in K \ / \ \overrightarrow{y} = \lambda \overrightarrow{x}$ ou $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{y}$; on dit alors aussi que les vecteurs sont "colinéaires".

PROP : deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont colinéaires ssi

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \exists \lambda \in K \ / \ \overrightarrow{y} = \lambda \overrightarrow{x}$$

(ATTENTION, il ne faut pas oublier le cas $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$)
D10
Lorsqu'il y a trois vecteurs, on parle de vecteurs "coplanaires".

Autres exemples E4

CNS (qui est souvent donnée comme définition première) :
Une famille finie de vecteurs est liée si et seulement s'il existe une combinaison linéaire de ses vecteurs qui soit nulle et pourtant non triviale, autrement dit :

$$\boxed{\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est liée} \Leftrightarrow \exists\, (\lambda_1, .., \lambda_p) \neq (0, ..., 0) \in K^p \ / \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0}}$$

D11

DEF : une famille finie de vecteurs est dite *libre* (ou qu'elle est formée de vecteurs *linéairement indépendants*) lorsque elle est non liée, donc si la seule combinaison linéaire de ses vecteurs qui soit nulle est la combinaison linéaire triviale.
La négation des encadrés ci-dessus donne :

$$\boxed{\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est libre} \Leftrightarrow \forall i_0 \in [|1, p|] \ \ / \ \overrightarrow{x}_{i_0} \notin \text{vect}\left(\overrightarrow{x}_1, ..., \overset{\vee}{\overrightarrow{x}}_{i_0}, ..., \overrightarrow{x}_p\right)}$$

$$\boxed{\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est libre} \Leftrightarrow \forall\, (\lambda_1, .., \lambda_p) \in K^p \ \ (\lambda_1, .., \lambda_p) = (0, ..., 0) \text{ ou } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x}_i \neq \overrightarrow{0}}$$

Soit

$$\boxed{\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est libre} \Leftrightarrow \forall\, (\lambda_1, .., \lambda_p) \in K^p \ \ \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x}_i = \overrightarrow{0} \ \Rightarrow (\lambda_1, .., \lambda_p) = (0, ..., 0)\right)}$$

c'est cette dernière équivalence que l'on utilise en pratique.

Exemples :
- la famille vide est libre
- autres exemples E5

Propriétés :
1. une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.
2. une famille de vecteurs avec des répétitions est toujours liée.
3. une famille contenant une sous-famille liée est toujours liée.
4. toute sous-famille d'une famille libre est libre (rem : 4. est exactement la contraposée de 3.)

D12

VI) Familles génératrices ; bases.

DEF : une famille finie de vecteurs de E est dite *génératrice* (sous-entendu : de E) si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est égal à E tout entier, autrement dit si tout vecteur de E s'exprime comme combinaison linéaire de ses vecteurs :

$$\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p) \text{ est génératrice } \begin{cases} \Leftrightarrow \operatorname{vect} \mathcal{F} = E \\ \Leftrightarrow E \subset \operatorname{vect} \mathcal{F} \\ \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in E \quad \overrightarrow{x} = \operatorname{cl}(\overrightarrow{x}_1 .., \overrightarrow{x}_p) \\ \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in E \;\; \exists (\lambda_1 .., \lambda_p) \in K^p \;/\; \overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{x}_i \end{cases}$$

REM : une famille est toujours génératrice du sev qu'elle engendre ! Autant la notion de famille libre est intrinsèque, autant celle de famille génératrice dépend de l'espace ambiant.

DEF : une famille libre et génératrice de E est appelée une *base* de E.

Exemples E6, à connaître parfaitement.

CNS 1 et DEF : une base de E est une famille de vecteurs de E telle que tout vecteur de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de ses éléments, autrement dit :

$$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n) \text{ est une base de } E \;\Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in E \;\; \exists! (x_1 .., x_n) \in K^n \;/\; \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i$$

$(x_1 .., x_n)$ est alors appelée la liste des coordonnées (ou des composantes) du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.
x_1 est appelée l'*abscisse*, x_2 l'*ordonnée*, x_3 la *cote* ou *altitude*.
Pour indiquer que $\overrightarrow{x}$ a pour coordonnées $(x_1 .., x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on écrira :

$$\overrightarrow{x} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{array} \right._{/\mathcal{B}}$$

D13
CNS 2 : une base est une famille libre maximale, autrement dit :

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \;\Leftrightarrow \begin{cases} \text{1. elle est libre} \\ \text{2. si on lui rajoute un vecteur, la famille obtenue est liée} \end{cases}$$

D14
CNS 3 : une base est une famille génératrice minimale, autrement dit :

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \;\Leftrightarrow \begin{cases} \text{1. elle est génératrice} \\ \text{2. si on lui ôte un vecteur, la famille obtenue est non génératrice} \end{cases}$$

D15
Autres exemples E7

VII) Dimension d'un espace vectoriel.

1) Espaces de dimension finie.
LEMME FONDAMENTAL (de Steinitz) : le nombre d'éléments d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice.
D16

THÉORÈME 1 : les bases (finies) d'un espace vectoriel (s'il y en a) ont toutes le même nombre d'éléments.
D17

DEF : la *dimension* d'un espace vectoriel ayant au moins une base finie est le nombre d'éléments de cette base :

$$\dim E = n \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n \in E \; / \; \begin{cases} (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n) \text{ libre} \\ \text{vect}\,(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n) = E \end{cases}$$

un espace vectoriel n'ayant pas de base finie est dit de *dimension infinie*.

Exemples

- $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est de dimension nulle (base = $\emptyset$)

- un ev de dimension 1 (donc de la forme $K\overrightarrow{x}$ avec $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$) est appelé une *droite* vectorielle

- un ev de dimension 2 (donc de la forme $K\overrightarrow{x} + K\overrightarrow{y}$ avec $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ libre) est appelé un *plan* vectoriel

- autres exemples E8

THÉORÈME 2 : toute famille libre d'un espace vectoriel dont les familles libres ont une taille majorée est incluse dans une base (théorème dit "de la base incomplète" faible) ; un ev est donc de dimension finie ssi ses familles libres ont une taille majorée.
D18

REM : un ev ayant une famille infinie dont toute sous-famille finie est libre est donc de dimension infinie ; la réciproque est vraie mais pas "évidente".
Exemples d'ev de dimension infinie E9
THÉORÈME 3 : toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel contient une sous-famille qui est une base ;
un ev est donc de dimension finie ss'il possède une famille génératrice finie.
D19

THÉORÈME 4 : si E est de dimension finie n :

1. toutes les bases ont n éléments	
2. les familles libres ont au plus n éléments	2 bis. les familles génératrices ont moins n éléments
3. une famille libre ayant n éléments est une base	3 bis. une famille génératrice ayant n éléments est une base
4. tte famille libre peut être complétée en une base	4 bis. tte famille génératrice contient une base

D20

THÉORÈME 5, dit "de la base incomplète" : étant donnés une famille finie $\mathcal{L}$ libre et une famille finie $\mathcal{G}$ génératrice, on peut toujours compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en prenant des vecteurs de $\mathcal{G}$.

2) Dimension des sous-espaces vectoriels.

THÉORÈME : les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie n sont de dimension finie $\leqslant n$; et le seul sev de dimension n est E.
D21

Application très importante : si F et G sont deux sev de dimensions finies de E, alors

$$F = G \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ F \subset G \\ 2.\ \dim F = \dim G \end{cases}$$

DEF : La dimension de l'espace ambiant diminuée de la dimension de F est appelée la *codimension* de F :

$$\text{codim } F = \dim E - \dim F$$

Un sous-espace de codimension 1 est appelé un *hyperplan*.

3) Dimension du produit cartésien de deux espaces vectoriels.

PROP : si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ est une base de E et $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f}_1, ..., \overrightarrow{f}_m\right)$ est une base de F, alors

$$\mathcal{D} = \left(\left(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{0_F}\right), ..., \left(\overrightarrow{e}_n, \overrightarrow{0_F}\right), \left(\overrightarrow{0_E}, \overrightarrow{f}_1\right), ..., \left(\overrightarrow{0_E}, \overrightarrow{f}_m\right)\right)$$

est une base de $E \times F$; par conséquent, si E et F sont de dimensions finies, $E \times F$ aussi, et

$$\boxed{\dim E \times F = \dim E + \dim F}$$

D22

VIII) Rang d'une famille de vecteurs.

1) Définitions.
DEF : Le *rang* d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{vect}(\mathcal{F}))$$

PROP : le rang de la famille $\mathcal{F}$ est la taille maximale d'une sous-famille libre de $\mathcal{F}$, ou la taille minimale d'une sous famille engendrant le même sous-espace que $\mathcal{F}$.

D23
E9

PROP : on suppose que $\dim E = n$ et que $|\mathcal{F}| = p$, alors :

$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \min(n,p)$
$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = p \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre
$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = n \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est génératrice
$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = n = p \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une base

D24

2) Détermination du rang à l'aide des coordonnées (en dimension finie).

a) Familles échelonnées dans une base.
DEF matrice d'une famille de vecteurs dans une base :
la *matrice* d'une famille finie de vecteurs dans une base est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille dans cette base ; pour une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{x}_1, ..., \overrightarrow{x}_p)$ dans $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$:

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{cccc} \overrightarrow{x}_1 & \overrightarrow{x}_j & \overrightarrow{x}_p & \\ a_{11} & & a_{1p} & \overrightarrow{e}_1 \\ & a_{ij} & & \overrightarrow{e}_i \\ a_{n1} & & a_{np} & \overrightarrow{e}_n \end{array} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

soit $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (a_{ij})$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{e}_i = \overrightarrow{x}_j$.

DEF : la famille $\mathcal{F}$ est dite "échelonnée" dans la base $\mathcal{B}$ si, après permutation éventuelle des $\overrightarrow{x}_j$ et des $\overrightarrow{e}_i$, la matrice $\left(a'_{ij}\right)$ de la famille permutée $\mathcal{F}'$ dans la base permutée $\mathcal{B}'$, les rangs r_j de la dernière coordonnée non nulle des $\overrightarrow{x}_j$ dans $\mathcal{B}$ forment une suite strictement croissante : $r_1 < ... < r_p$, ce qui donne :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}') = \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ \neq 0 & . & . \\ 0 & \neq 0 & . \\ | & 0 & \neq 0 \\ | & | & 0 \\ | & | & | \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E10

PROP : une famille échelonnée dans une certaine base est toujours libre.
D25

b) Méthode du pivot de Gauss pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs exprimés dans une base.

Il s'agit, en appliquant les manipulations élémentaires ci-dessous, d'obtenir une famille ayant le même rang que la famille de départ qui soit échelonnée ; le rang de la famille de départ est donc le nombre d'éléments de la famille échelonnée.

PROP : les 4 manipulations élémentaires ci-dessous ne modifient pas le rang de la famille de vecteurs :

1. Échanger deux vecteurs
2. Multiplier un vecteur par un élément λ de K non nul
3. Ajouter à un vecteur un autre.
4. Supprimer un vecteur nul.

D26

REM : en pratique, on fait une combinaison des propriétés 2 et 3 :

5. Ajouter à un vecteur (éventuellement multiplié par une constante NON NULLE), une combinaison linéaire des autres.

ou la combinaision des propriétés 5.et 4.

6. Supprimer un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

E11

IX) Sommes directes, supplémentaires.
1) Introduction.

2) Définition et première caractérisation.

DEF : on dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *en somme directe* (ou que *leur somme est directe,* ou encore qu'ils sont *indépendants*) si leur intersection est réduite au sous-espace nul ; on écrit :

$$H = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ H = F + G \\ 2.\ F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \end{cases}$$

E 12

CNS 1 : F et G sont en somme directe ssi tout vecteur de $H = F + G$ se décompose de façon *unique* comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$H = F \oplus G \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in H \ \ \exists! \, (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \in F \times G \ / \ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$$

D27

DEF : l'unique $\overrightarrow{y}$ ci dessus est appelé le projeté de $\overrightarrow{x}$ sur F parallèlement à G, et l'application de H dans lui-même qui à tout $\overrightarrow{x}$ de H fait correspondre $\overrightarrow{y}$ est appelé la *projection* $\begin{cases} \text{de } \textit{base } F \text{ et de } \textit{direction } G \\ \text{sur } F \text{ parallèlement à } G \end{cases}$.

REM :

$$\overrightarrow{y} = p(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \overrightarrow{y} \in F \\ 2.\ \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \in G \end{cases}$$

3) Sommes et dimension.
PROP 1 : le sous-espace vectoriel engendré par la réunion de deux familles est la somme des sous-espaces engendrés par chacune des familles :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) \begin{cases} F = \text{vect}(\mathcal{F}) \\ G = \text{vect}(\mathcal{G}) \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : F + G = \text{vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})}$$

REM : la "réunion" de deux familles est la mise bout à bout de ces deux familles.
D28

CORO : si F et G sont deux sev de E de dimensions finies, alors $F+G$ est de dimension finie, et

$$\boxed{\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G}$$

D29
PROP 2 : la réunion de deux familles libres appartenant à deux sev en somme directe est encore une famille libre :

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) \begin{cases} F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \\ \mathcal{L} \text{ famille libre de } F \\ \mathcal{M} \text{ famille libre de } G \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : \mathcal{L} \cup \mathcal{M} \text{ est libre}}$$

D30

CNS 2 (CORO de PROP 1 et 2) : la somme de deux sev de dimensions finies est directe si et seulement si la réunion d'une base de l'un et d'une base de l'autre est une base de la somme.

$$\text{si } \boxed{(\text{H}) \begin{cases} H = F + G \\ \mathcal{B} \text{ base de } F \\ \mathcal{C} \text{ base de } G \end{cases}} \text{ alors } \boxed{(\text{C}) : H = F \oplus G \Leftrightarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \text{ est une base de } F+G}$$

CORO 1 :

$$\boxed{\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G}$$

CORO 2 : si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est libre, $\text{vect}(\mathcal{L}) = \text{vect}(\mathcal{L}_1) \oplus \text{vect}(\mathcal{L}_2)$

D31
4) Supplémentaires d'un sous-espace.

DEF : soient F et G deux sev de E ; on dit que G est un *supplémentaire* de F (dans E), ou que F et G sont *supplémentaires*, si leur somme est directe et égale à E, soit :

$$\boxed{E = F \oplus G}$$

E13
ATTENTION : ne pas confondre avec la notion de complémentaire.
TH (corollaire du théorème de la base incomplète) :
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède au moins un supplémentaire.
D32

5) Relation de Grassmann.

TH : Soient F et G deux sev de dimensions finie d'un espace vectoriel E ; on a alors la relation, dite de Grassmann (1809-1877) :

$$\boxed{\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G}$$

D33

Applications :
- deux plans en dimension 3 ne peuvent pas être en somme directe
- si $\begin{cases} \dim F = p \\ \dim G = q \\ \dim E = n \end{cases}$ alors $\dim F \cap G \geqslant p + q - n$, et donc, si $p + q \geqslant n + 1$, F et G ne peuvent pas être en somme directe.

A1

On en déduit aussi une CNS pour que deux sev soient supplémentaires en dimension finie :

TH : si F et G sont deux sev de dim. finies de E de dimension finie, F et G sont supplémentaires si et seulement si deux parmi les 3 propriétés suivantes sont réalisées :

1. $F + G = E$
2. $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$
3. $\dim F + \dim G = \dim E$

D34

REM : ce qu'on utilise le plus souvent est la conjonction 2 + 3.

En résumé : $E = F \oplus G$ équivaut à :

1. $E = F + G$ et $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ (c'est la définition)
2. $\forall \overrightarrow{z} \in E \ \exists! (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F \times G \ / \ \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ (c'est la CNS 1)
3. si $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ base de } F \\ \mathcal{C} \text{ base de } G \end{cases}$ alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E (c'est la CNS 2)
4. $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
5. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

REM : 3.,4. et 5. ne sont valables que EN DIMENSION FINIE.