B. APPLICATIONS LINÉAIRES

1. : (Petites mines 96) Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^4\right)$ définie par $f(\overrightarrow{e}_1) = f(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2$, $f(\overrightarrow{e}_3) = -f(\overrightarrow{e}_4) = \overrightarrow{e}_3 - \overrightarrow{e}_4$; $((\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^4$).
   (a) Déterminer $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $f^2(\overrightarrow{e}_1), f^2(\overrightarrow{e}_2), f^2(\overrightarrow{e}_3), f^2(\overrightarrow{e}_4)$ et $f^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.
   (b) Remplir le tableau :

	base	représentation paramétrique	système d'éq. cartésiennes
$\ker f$	$(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2, ...)$		
$\operatorname{Im} f$			
$\ker f^2$			
$\operatorname{Im} f^2$			

   (c) Vérifier que que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{K}^4$, mais que par contre $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \neq \mathbb{K}^4$ (attention au faux théorème du rang !), tandis que $\mathbb{K}^4 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de $\mathbb{E}$.
   (a) Montrer que si $\mathcal{F}$ est liée, $f(\mathcal{F})$ est liée. Contraposée de cette implication ?
   (b) Montrer que si $\mathcal{F}$ est génératrice (de $\mathbb{E}$), $f(\mathcal{F})$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.

3. : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$; avec $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$; $\mathbb{E}$ de dimension n, $\mathbb{F}$ de dimension p.
   Dire pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de f.
   (a) L'image de toute famille libre est libre.
   (b) $\operatorname{Im} f = \mathbb{F}$.
   (c) L'image d'une base de $\mathbb{E}$ est génératrice de $\mathbb{F}$.
   (d) $\operatorname{rg} f = n$.
   (e) L'image d'une base de $\mathbb{E}$ est libre.
   (f) $\operatorname{rg} f = p$
   (g) L'image d'une base de $\mathbb{E}$ est une base de $\mathbb{F}$.
   (h) L'image de toute famille génératrice de $\mathbb{E}$ est génératrice de $\mathbb{F}$.

4. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ où $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
   (a) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
   (b) Comparer vis-à-vis de l'inclusion $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im} g$.

5. Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$;
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.
   (b) Donner un exemple très simple où $\operatorname{Im}(f+g) \neq \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

6. :

(a) Donner, si c'est possible, un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$

i. dont le noyau est réduit à $\{(0,0)\}$.

ii. dont le noyau et l'image sont non nuls et distincts.

iii. dont le noyau est égal à l'image.

iv. dont le noyau est égal à $\mathbb{K}^2$.

(b) Mêmes questions dans $\mathbb{K}^3$, puis dans $\mathbb{K}^n$.

7. :

(a) Soit $D : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$,

i. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ surjectif mais pas injectif. Est-ce contradictoire ?

ii. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ injectif mais pas surjectif.

(b) Soit $D_n : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$. Vérifier qu'on a bien :

$$\operatorname{rg} D_n + \dim \operatorname{Ker} D_n = \dim \mathbb{K}_n[X]$$

8. : Soit T un réel fixé, et $\mathbb{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \left\{ f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \;/\; f \text{ est périodique de période } T \right\}$.

(a) Vérifier que si $f \in \mathbb{E}$, alors f' également.
Soit D l'endomorphisme : $\left| \begin{array}{c} \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} D$.

(c) Soit $g \in \mathbb{E}$; montrer que $g \in \operatorname{Im} D$ si et seulement si $\int_0^T g(x)\,dx = 0$.

(d) Montrer que $\mathbb{E} = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D$.

9. : Caractérisations des homothéties

(a) Démontrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes f de $\mathbb{E}$ tels que :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \quad \exists \alpha_{\overrightarrow{x}} \in \mathbb{K} \quad f(\overrightarrow{x}) = \alpha_{\overrightarrow{x}}\ \overrightarrow{x}$$

Indication : démontrer que $\alpha_{\overrightarrow{x}} = \alpha_{\overrightarrow{y}}$, d'abord dans le cas $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ libre, puis dans le cas $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ lié avec $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ non nuls.

(b) En déduire que les homothéties sont les seuls endomorphismes de $\mathbb{E}$ qui commutent avec tout autre endomorphisme (on pourra considérer une projection sur $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{x})$).

(c) ** Généralisation de (a).
Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ vérifient $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \quad \exists \alpha(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{K} \quad f(\overrightarrow{x}) = \alpha(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x})$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{K} \quad f = \alpha g$.

10. : Soit $\mathbb{P}$ un plan vectoriel ; on va montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{P}$ qui n'est pas une homothétie, tout endomorphisme qui commute avec f est de la forme $\alpha id_E + \beta f$.

(a) En utilisant le 9. (a) montrer qu'il existe $\overrightarrow{x_0}$ de $\mathbb{P}$ tel que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}))$ soit une base de $\mathbb{P}$.

(b) Soit g un endomorphisme commutant avec f ; exprimer $g(\overrightarrow{x_0})$ dans $\mathcal{B}$, puis $g(f(\overrightarrow{x_0}))$ et en déduire que g est de la forme $\alpha id_E + \beta f$.

(c) En déduire que $\left(id_E, f, f^2\right)$ est liée.
Attention, ceci n'est valable qu'en dimension 2 ; on peut trouver en dimension supérieure des endomorphismes f qui ne sont pas des homothéties tels qu'il existe un endomorphisme commutant avec f et qui n'est pas un polynôme en f (cf. exercice 9. (c) sur les matrices).

11. : Début ENSI 1975

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

Soit f_A l'application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^4$ dont la matrice associée, relativement aux bases canoniques $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$de $\mathbb{K}^3$ et $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}, \overrightarrow{l'}\right)$ de $\mathbb{K}^4$ est A.

(a) Déterminer $\operatorname{Ker} f_A$ et en déduire $\operatorname{rg} f_A$.

(b) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f_A$ dont les vecteurs n'ont que des coordonnées égales à 0 ou à 1. Soit $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ cette base.

(c) Que dire de la restriction g de f_A à $\operatorname{Im} f_A$ (pour l'ensemble d'arrivée) ?
Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de $\mathbb{K}^3$ et à la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ de $\operatorname{Im} f_A$.

12. Soit $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}\right)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$, et $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \to \mathbb{E} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \mapsto \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} \end{array} \right.$

(a) Vérifier que f est linéaire.

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre ssi f est injective, et que $\mathcal{F}$ est génératrice ssi f est surjective.

(c) Soit F l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{0}$. Pourquoi est-ce un sev de $\mathbb{E}$?

(d) Si $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = p$, que dire de F ?

(e) Si $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = p - 1$, montrer que les éléments de F sont proportionnels entre eux.

(f) Déterminer $\dim F$ en fonction de p et $rg\,(\mathcal{F})$.

(g) Déterminer des équations cartésiennes de F et une base de F, quand

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_5} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. : Utilisation des applications linéaires dans les équations différentielles linéaires.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ et $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$. En étudiant l'application linéaire $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \;\mapsto P'' + aP' + bP \end{array} \right.$, montrer que l'équation différentielle linéaire $y'' + ay' + by = P_0$ possède une unique solution polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

14. : Donner la matrice relativement aux bases canoniques des applications linéaires suivantes :

(a) Symétrie s de $\mathbb{K}^4$ de base $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$ et de direction $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right)$
$\left(\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)\right.$ est la base canonique de $\left.\mathbb{K}^4\right)$.

(b) Application $D : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad P \mapsto P'$

(c) Application $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{n+1}[X], \ P(X) \mapsto X.P(X)$

(d) Application $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X], \quad P(X) \mapsto P(X+1)$

(e) Application $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{2n}[X], \quad P(X) \mapsto P\left(X^2\right)$

(f) Application $T : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}), \quad M \mapsto {}^tM$; * généraliser à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

(g) Application $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}), \quad M \mapsto AM$ (A matrice carrée fixée) et application $g : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}), \quad M \mapsto MA$; * généraliser à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

(h) Application $f : \mathbb{K}_2[X] \times \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}_2[X]$, $(P, Q) \mapsto P - Q$.

15. : Soit $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base d'un espace vectoriel de dimension 2. Les matrices suivantes sont les matrices d'endomorphismes f_k de $\mathbb{E}$, relativement à $\mathcal{B}$.
On demande dans chacun des cas :
- de faire une figure avec $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormée, $\left(f_k\left(\overrightarrow{i}\right), f_k\left(\overrightarrow{j}\right)\right)$
- de donner les expressions analytiques définissant f_k
- de construire l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque
- de reconnaître f_k géométriquement.

(a) $M_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(b) $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $M_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(e) $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

16. (extrait de ENSI oral) :
Pour quelles valeurs de n l'application $f : P \mapsto (2X+1)P - \left(X^2 - 1\right)P'$ définit-elle un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$?
En donner la matrice canonique dans ce cas.

17. Soit $\mathbb{E} = \mathbb{K}^{\mathbb{K}^*}$ et $\mathbb{P} = \{f \in \mathbb{E} \mathrel{/} f \text{ est paire}\}, \mathbb{I} = \{f \in \mathbb{E} \mathrel{/} f \text{ est impaire}\}$; montrer que $\mathbb{E} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{I}$ et que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ sont isomorphes.

18. * : Suites exactes et nouvelle démonstration de la relation de Grassmann.
Soit la suite d'applications linéaires : $\mathbb{E}_1 \overset{f_1}{\to} \mathbb{E}_2 \overset{f_2}{\to} \cdots \overset{f_{n-1}}{\to} \mathbb{E}_{n-1} \overset{f_n}{\to} \mathbb{E}_n$
On dit que cette suite est *exacte* si $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$ pour $i = 1, ..., n-2$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Prouver que

i. f est injective si et seulement si $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \to \mathbb{E} \overset{f}{\to} \mathbb{F}$ est exacte.
(remarque : il n'y a qu'une possibilité pour la première application)

ii. f est surjective si et seulement si $\mathbb{E} \overset{f}{\to} \mathbb{F} \to \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est exacte (remarque similaire).

(b) On suppose que $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \to \mathbb{E}_1 \overset{f_1}{\to} \mathbb{E}_2 \overset{f_2}{\to} \cdots \overset{f_{n-1}}{\to} \mathbb{E}_{n-1} \overset{f_{n-1}}{\to} \mathbb{E}_n \to \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est exacte. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim \mathbb{E}_k = 0$$

(c) $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{E}$. Soit

$$\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{F} \cap \mathbb{G} \to \mathbb{F} \times \mathbb{G} \\ \overrightarrow{x} \mapsto \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right) \end{array} \right. \quad \text{et } \psi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{F} \times \mathbb{G} \to \mathbb{F} + \mathbb{G} \\ (x, y) \mapsto x - y \end{array} \right.$$

montrer que la suite $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \to \mathbb{F} \cap \mathbb{G} \overset{\varphi}{\to} \mathbb{F} \times \mathbb{G} \overset{\psi}{\to} \mathbb{F} + \mathbb{G} \to \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est exacte.

(d) En déduire la relation de Grassmann.

19. : Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$; E' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et F' un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$. On demande de prouver les relations suivantes :
    (a) $\dim f(E') = \dim E' - \dim(E' \cap \operatorname{Ker} f)$ (en particulier $\dim f(E') \leqslant \dim E'$.)
    (b) $\dim f^{-1}(F') = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(F' \cap \operatorname{Im} f)$.
    (c) $\operatorname{codim}_{\mathbb{E}}\left(f^{-1}(F')\right) = \operatorname{codim}_{\mathbb{F}}(F') - \operatorname{codim}_{\mathbb{F}}(\operatorname{Im} f + F')$.

20. : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ bijective et F un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{E}$ stable par u, c'est à dire que $u(F) \subset F$.
    (a) Montrer que si F est de dimension finie, alors $u(F) = F$.
    (b) * Montrer que ceci est faux en dimension infinie : considérer u de $(\mathbb{K}[X])^2$ dans lui-même qui à (P,Q) associe $\left(XP, P(0) + \dfrac{Q - Q(0)}{X}\right)$,et $F = \mathbb{K}[X] \times \{0\}$.

21. :
    (a) Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ (en dimension finie). Montrer que :
    $$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$
    donner un exemple pour chaque cas d'égalité.
    (b) Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$ (en dimension finie) ;
        i. Montrer
            A. $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} f)$
            B. $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} g)$
            C. $\dim(\ker(g \circ f)) \leqslant \dim(\ker f) + \dim(\ker g)$ (utiliser le théorème du rang pour la restriction h de f à $\ker(g \circ f)$)
        ii. En déduire les inégalités dites "de Sylvester" :
        $$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim \mathbb{F} \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$
        Étudier les cas d'égalité.
        iii. * Montrer plus précisément en utilisant la restriction k de g à $\operatorname{Im} f$ que
        $$\begin{aligned} rg(g \circ f) &= rg(f) - \dim \ker g \cap \operatorname{Im} f \\ &= rg(f) + rg(g) - \dim \mathbb{F} + (\dim \ker g - \dim \ker g \cap \operatorname{Im} f) \\ &= rg(g) - \operatorname{codim}_{\mathbb{F}}(\ker g + \operatorname{Im} f) \end{aligned}$$
    (a) Montrer que pour des endomorphismes **en dimension finie, si** $g \circ f$ est bijectif, alors f et g le sont.
    deux méthodes : soit utiliser la relation : $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$, montrée à l'exercice précédent, soit montrer que f est injective et conclure.
    (b) Soit $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$, trouver $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}$, et montrer que ni f, ni g ne sont bijectifs (le (a) est donc faux en dimension infinie).

22. * : Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$.
    (a) Montrer que si F' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$,
    $$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(F')\right) &= F' \cap \operatorname{Im} f \\ g^{-1}(g(F')) &= F' + \operatorname{Ker} g \end{aligned}$$
    (b) En déduire que
    $$\begin{aligned} \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f &= f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \text{ et } \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ f)) \\ \operatorname{Ker}(g \circ f) &= f^{-1}(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f) \text{ et } \operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f) \end{aligned}$$

(c) En déduire que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(g \circ f) &= \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{\overrightarrow{0}\} \\ \operatorname{Im}(g \circ f) &= \operatorname{Im} g \quad \Leftrightarrow \mathbb{F} = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

(d) En déduire qu'en dimension finie :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(g \circ f) &= \operatorname{rg}(f) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{\overrightarrow{0}\} \\ \operatorname{rg}(g \circ f) &= \operatorname{rg}(g) \Leftrightarrow \mathbb{F} = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f \\ \mathbb{F} &= \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow ?? \end{aligned}$$

23. : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$; pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $I_k = \operatorname{Im}\left(f^k\right)$; Montrer que :

(a) $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$

(b) * Si $N_k = N_{k+1}$ alors $\forall q \geqslant k \quad N_q = N_k$ et $N_k \cap I_k = \{\overrightarrow{0}\}$.

(c) * Si $I_k = I_{k+1}$ alors $\forall q \geqslant k \quad I_q = I_k$ et $\mathbb{E} = N_k + I_k$.

(d) * Si $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \ / \ N_k = N_{k+1}\}$ et $k_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \ / \ I_k = I_{k+1}\}$, alors $k_1 = k_2 \ (= k)$ et $\mathbb{E} = N_k \oplus I_k$.

24. : Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$;

(a) On considère les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}) \quad &: \quad \mathbb{E} = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \qquad (\mathbf{B}) \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \\ (\mathbf{A}') \quad &: \quad \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \quad (\mathbf{B}') \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

Prouver que $(\mathbf{A}) \Leftrightarrow (\mathbf{B})$ et $(\mathbf{A}') \Leftrightarrow (\mathbf{B}')$ (cf. exercice 23).

(b) Soit $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto \dfrac{P - P(0)}{X} \end{array} \right.$.

i. Montrer que f vérifie $(\mathbf{A}')$, mais ne vérifie pas $(\mathbf{A})$

ii. Montrer que g vérifie $(\mathbf{A})$, mais ne vérifie pas $(\mathbf{A}')$

(c) On suppose $\dim \mathbb{E} < \infty$. Montrer que : $(\mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{B}')$ et $(\mathbf{A}') \Rightarrow (\mathbf{A})$. Conclusion ?
En déduire que :

$$\mathbb{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$$

(d) Donner un exemple d'un tel endomorphisme f, autre qu'un projecteur ou qu'une bijection.
Donner un exemple d'un endomorphisme f ne vérifiant pas cette propriété.

25. : Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, et $f_0 \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f)$ la restriction de f à $\operatorname{Im} f$; montrer que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f_0 \text{ est surjective} \\ &\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \Leftrightarrow f_0 \text{ est injective} \\ &\mathbb{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow ? \end{aligned}$$

26. :

(a) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ dont l'image égale le noyau.

(b) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Montrer que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f \circ f = 0 \\ n \text{ est pair} \\ \operatorname{rg} f = \dfrac{n}{2} \end{array} \right.$

(c) Si $n = 2p$, soit $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$; il existe donc p vecteurs $\overrightarrow{e}'_i$ tels que $\overrightarrow{e}_i = f(\overrightarrow{e}'_i)$; montrer que $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_p, \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, ..., \overrightarrow{e}'_p\right)$ est une base de $\mathbb{E}$ et écrire la matrice de f dans cette base.

27. : Les ensembles constitués des fonctions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels, des sous-algèbres de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

(a) Les fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
(b) *Les fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
(c) Les fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
(d) Les fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.
(e) *Les fonctions uniformément continues bornées sur $\mathbb{R}$.
(f) Les fonctions lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}$.
(g) Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

28. : Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tels que f et g commutent, *i.e.* $f \circ g = g \circ f$.
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{E}$ est stable par f si $f(F) \subset F$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.
(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, Montrer que $P(f) \left(\overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k f^k, \text{ sans oublier que } f^0 = id_E \right)$ et g commutent. Qu'en déduit-on pour $\operatorname{Ker}(P(f))$ et $\operatorname{Im}(P(f))$?

29. * : Soit $\mathbb{E} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{P}$ le sous-espace constitué des fonctions paires, $\mathbb{I}$ celui constitué des fonctions impaires.

(a) Vérifier que $\mathbb{E} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{I}$.
(b) On définit une application φ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ par $\varphi(f)(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$ pour tout $f \in \mathbb{E}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
   i. Vérifier la linéarité de φ ; déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$; en déduire φ^2.
   ii. En déduire que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ sont isomorphes (comparer avec l'exercice 17).

30. * : Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ non réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

(a) $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}} \Rightarrow f = \pm \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.
(b) $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{E}} \Rightarrow \exists \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \in \mathbb{E} \quad / \quad f\left(\overrightarrow{x}\right) = \pm \overrightarrow{x}$
(c) si $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0, a \neq 0$

$$af^2 + bf + c\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}} = 0 \Rightarrow (2af + b\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}})^2 = \Delta\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \Rightarrow f = \left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$$

(deux assertions)

(d) On suppose $\dim \mathbb{E} = 2$.
Si $\exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ tel que $\left(\overrightarrow{x}, f\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ est libre et $f^2\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$, alors $f^2 = 0$.

31. * :

(a) lemme : montrer que si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont non réduits à $\{\overrightarrow{0}\}$, $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{0}\}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$; montrer que
(b) f est simplifiable à gauche $\Leftrightarrow$ f est inversible à gauche dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ $\Leftrightarrow$ f est injectif.
(c) f est simplifiable à droite $\Leftrightarrow$ f est inversible à droite dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ $\Leftrightarrow$ f est surjectif.
Donc $f \in GL(\mathbb{E}) \Leftrightarrow f$ est simplifiable (ou régulière).

32. * : Soient $x_1, ..., x_n$ n éléments distincts de $\mathbb{K}$.
Montrer que l'ensemble des $n-$uplets $(P(x_1), ..., P(x_n))$ pour P décrivant $\mathbb{K}[X]$ est égal à $\mathbb{K}^n$ tout entier.

33. * : Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{E} = \mathbb{K}^I$ telle que $\varphi(x \mapsto 1)$ ne soit pas nulle. Montrer que l'ensemble G des applications constantes de I dans $\mathbb{K}$ est un supplémentaire de $F = \ker \varphi$ dans $\mathbb{E}$.

34. :

(a) déterminer la matrice canonique de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ transformant le plan $P : x+y=0$ en le plan $P' : x+y-z=0$, le plan $Q : y+z=0$ en le plan $Q' : -x+y+z=0$, et le plan $R : x+z=0$ en le plan $R' : x-y+z=0$.

(b) * Montrer que plus généralement, il existe en dimension n un unique endomorphisme transformant n hyperplans donnés, noyaux de n formes linéaires formant une famille libre, en n hyperplans donnés.

35. * : Soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{E}$.

(a) Montrer qu'il existe un $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ tel que $f(\overrightarrow{e}) = 1$.

(b) Pour $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de $\mathbb{E}$, on pose $\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})\overrightarrow{y} + f(\overrightarrow{y})\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})f(\overrightarrow{y})\overrightarrow{e}$; montrer que $(E, +, ., *)$ est une $K-$algèbre commutative.

(c) Résoudre dans $\mathbb{E}^2$: $\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

36. * : Base duale.

(a) Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $(e_1, e_2, ..., e_n)$; pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on définit $f_i \in L(E, K)$ par $f_i(e_j) = \delta_{ij}$; montrer que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, K)$ (appelée *base duale* de $(e_1, e_2, ..., e_n)$).

(b) On prend ici $\mathbb{E} = \mathbb{K}_{n-1}[X]$; soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $f_i \in \mathcal{L}(E, K)$ définie par $f_i(P) = P(x_i)$. Montrer que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, K)$ et déterminer une base $(P_1, P_2, ..., P_n)$ de $\mathbb{E}$ dont $(f_1, f_2, ..., f_n)$ soit la base duale.