1. : (Petites mines 96) Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^4\right)$ définie par $f(\overrightarrow{e}_1) = f(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2$, $f(\overrightarrow{e}_3) = -f(\overrightarrow{e}_4) = \overrightarrow{e}_3 - \overrightarrow{e}_4$; $((\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^4$).

   (a) Déterminer $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $f^2(\overrightarrow{e}_1), f^2(\overrightarrow{e}_2),\ f^2(\overrightarrow{e}_3), f^2(\overrightarrow{e}_4)$ et $f^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   (b) Remplir le tableau :

	base	représentation paramétrique	système d'éq. cartésiennes
$\ker f$	$(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$		
$\operatorname{Im} f$			
$\ker f^2$			
$\operatorname{Im} f^2$			

   (c) Vérifier que que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{K}^4$, mais que par contre $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \neq \mathbb{K}^4$ (attention au faux théorème du rang !), tandis que $\mathbb{K}^4 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Im} f^2$.

2. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ où $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

   (a) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

   (b) Comparer vis-à-vis de l'inclusion $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im} g$.

3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$;

   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

   (b) Donner un exemple très simple où $\operatorname{Im}(f + g) \neq \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de $\mathbb{E}$.

   (a) Montrer que si $\mathcal{F}$ est liée, $f(\mathcal{F})$ est liée. Contraposée de cette implication ?

   (b) Montrer que si $\mathcal{F}$ est génératrice (de $\mathbb{E}$), $f(\mathcal{F})$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.

5. :

   (a) Donner, si c'est possible, un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$

      i. dont le noyau est réduit à $\{(0,0)\}$.

      ii. dont le noyau et l'image sont non nuls et distincts.

      iii. dont le noyau est égal à l'image.

      iv. dont le noyau est égal à $\mathbb{K}^2$.

   (b) Mêmes questions dans $\mathbb{K}^3$, puis dans $\mathbb{K}^n$.

6. : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$; avec $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$; $\mathbb{E}$ de dimension n, $\mathbb{F}$ de dimension p.
   Dire pour chacune des phrases suivantes, si elle caractérise l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité de f.

   (a) L'image de toute famille libre est libre.

   (b) $\operatorname{Im} f = \mathbb{F}$.

   (c) L'image d'une base de $\mathbb{E}$ est génératrice de $\mathbb{F}$.

(d) $\operatorname{rg} f = n$.

(e) L'image d'une base de $\mathbb{E}$ est libre.

(f) $\operatorname{rg} f = p$

(g) L'image d'une base de $\mathbb{E}$ est une base de $\mathbb{F}$.

(h) L'image de toute famille génératrice de $\mathbb{E}$ est génératrice de $\mathbb{F}$.

7. :

(a) Soit $D : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$,

i. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ surjectif mais pas injectif. Est-ce contradictoire ?

ii. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ injectif mais pas surjectif.

(b) Soit $D_n : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$. Vérifier qu'on a bien :

$$\operatorname{rg} D_n + \dim \operatorname{Ker} D_n = \dim \mathbb{K}_n[X]$$

8. : Soit T un réel fixé, et $\mathbb{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f \text{ est périodique de période } T \right\}$.

(a) Vérifier que si $f \in \mathbb{E}$, alors f' également.
Soit D l'endomorphisme : $\left| \begin{array}{c} \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} D$.

(c) Soit $g \in \mathbb{E}$; montrer que $g \in \operatorname{Im} D$ si et seulement si $\int_0^T g(x)\, dx = 0$.

(d) Montrer que $\mathbb{E} = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D$.

9. : Caractérisations des homothéties.

(a) Démontrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes f de $\mathbb{E}$ tels que :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \quad \exists \alpha_{\overrightarrow{x}} \in \mathbb{K} \quad f(\overrightarrow{x}) = \alpha_{\overrightarrow{x}} \ \overrightarrow{x}$$

Indication : démontrer que $\alpha_{\overrightarrow{x}} = \alpha_{\overrightarrow{y}}$, d'abord dans le cas $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ libre, puis dans le cas $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ lié avec $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ non nuls.

(b) En déduire que les homothéties sont les seuls endomorphismes de $\mathbb{E}$ qui commutent avec tout autre endomorphisme (on pourra considérer une projection sur $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{x})$).

(c) ** Généralisation de (a).
Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ vérifient $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} \quad \exists \alpha(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{K} \quad f(\overrightarrow{x}) = \alpha(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x})$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{K} \quad f = \alpha g$.

10. : Soit $\mathbb{P}$ un plan vectoriel ; on va montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{P}$ qui n'est pas une homothétie, tout endomorphisme qui commute avec f est de la forme $\alpha id_E + \beta f$.

(a) En utilisant le 9. (a) montrer qu'il existe $\overrightarrow{x_0}$ de $\mathbb{P}$ tel que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x_0}, f(\overrightarrow{x_0}))$ soit une base de $\mathbb{P}$.

(b) Soit g un endomorphisme commutant avec f ; exprimer $g(\overrightarrow{x_0})$ dans $\mathcal{B}$, puis $g(f(\overrightarrow{x_0}))$ et en déduire que g est de la forme $\alpha id_E + \beta f$.

(c) En déduire que $\left(id_E, f, f^2\right)$ est liée.
Attention, ceci n'est valable qu'en dimension 2 ; on peut trouver en dimension supérieure des endomorphismes f qui ne sont pas des homothéties tels qu'il existe un endomorphisme commutant avec f et qui n'est pas un polynôme en f (cf. exercice 4. (c) sur les matrices).

11. : Début ENSI 1975

On donne la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$.

Soit f_A l'application linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^4$ dont la matrice associée, relativement aux bases canoniques $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de $\mathbb{K}^3$ et $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}, \overrightarrow{l'}\right)$ de $\mathbb{K}^4$ est A.

(a) Déterminer $\operatorname{Ker} f_A$ et en déduire $\operatorname{rg} f_A$.

(b) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f_A$ dont les vecteurs n'ont que des coordonnées égales à 0 ou à 1. Soit $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ cette base.

(c) Que dire de la restriction g de f_A à $\operatorname{Im} f_A$ (pour l'ensemble d'arrivée) ?
Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de $\mathbb{K}^3$ et à la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ de $\operatorname{Im} f_A$.

12. Soit $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}\right)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$, et $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \to \mathbb{E} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} \end{array} \right.$

(a) Vérifier que f est linéaire.

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre ssi f est injective, et que $\mathcal{F}$ est génératrice ssi f est surjective.

(c) Soit N l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{0}$. Pourquoi est-ce un sev de $\mathbb{E}$?

(d) Si $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = p$, que dire de N ?

(e) Déterminer $\dim N$ en fonction de p et $rg\left(\mathcal{F}\right)$.

(f) Si $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = p - 1$, montrer que les éléments de N sont proportionnels entre eux.

(g) Déterminer une base de N quand

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{x_5} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. : Utilisation des applications linéaires dans les équations différentielles linéaires.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ et $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$. En étudiant l'application linéaire $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P'' + aP' + bP \end{array} \right.$, montrer que l'équation différentielle linéaire $y'' + ay' + by = P_0$ possède une unique solution polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

14. : Donner la matrice relativement aux bases canoniques des applications linéaires suivantes :

(a) Symétrie s de $\mathbb{K}^4$ de base $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}\right)$ et de direction $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\right)$
$\left(\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\right)\right.$ est la base canonique de $\left.\mathbb{K}^4\right)$.

(b) Application $D : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $P \mapsto P'$

(c) Application $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{n+1}[X]$, $P(X) \mapsto X.P(X)$

(d) Application $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1)$

(e) Application $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{2n}[X]$, $P(X) \mapsto P\left(X^2\right)$

(f) Application $T : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto {}^tM$; * généraliser à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

(g) Application $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$ (A matrice carrée fixée) et application $g : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto MA$; * généraliser à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

(h) Application $f : \mathbb{K}_2[X] \times \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}_2[X]$, $(P, Q) \mapsto P - Q$.

15. : Soit $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base d'un espace vectoriel de dimension 2. Les matrices suivantes sont les matrices d'endomorphismes f_k de $\mathbb{E}$, relativement à $\mathcal{B}$.
On demande dans chacun des cas :
- de faire une figure avec $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormée, $\left(f_k\left(\overrightarrow{i}\right), f_k\left(\overrightarrow{j}\right)\right)$
- de donner les expressions analytiques définissant f_k
- de construire l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque
- de reconnaître f_k géométriquement.

(a) $M_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

(b) $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $M_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(e) $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

16. (extrait de ENSI oral) :
Pour quelles valeurs de n l'application $f : P \mapsto (2X+1)P - \left(X^2 - 1\right)P'$ définit-elle un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$?
En donner la matrice canonique dans ce cas.

17. * : Suites exactes et nouvelle démonstration de la relation de Grassmann.
Soit la suite d'applications linéaires : $\mathbb{E}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{E}_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathbb{E}_{n-1} \xrightarrow{f_n} \mathbb{E}_n$
On dit que cette suite est *exacte* si $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$ pour $i = 1, ..., n-1$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Prouver que

i. f est injective si et seulement si $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \to \mathbb{E} \xrightarrow{f} \mathbb{F}$ est exacte.
(remarque : il n'y a qu'une possibilité pour la première application)

ii. f est surjective si et seulement si $\mathbb{E} \xrightarrow{f} \mathbb{F} \to \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est exacte (remarque similaire).

(b) On suppose que $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \to \mathbb{E}_1 \xrightarrow{f_1} \mathbb{E}_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathbb{E}_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathbb{E}_n \to \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est exacte, et les espaces $\mathbb{E}_k$ de dimension finie. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim \mathbb{E}_k = 0$$

(c) $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{E}$. Soit

$$\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{F} \cap \mathbb{G} \to \mathbb{F} \times \mathbb{G} \\ \overrightarrow{x} \mapsto \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right) \end{array} \right. \quad \text{et } \psi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{F} \times \mathbb{G} \to \mathbb{F} + \mathbb{G} \\ (x, y) \mapsto x - y \end{array} \right.$$

montrer que la suite $\left\{\overrightarrow{0}\right\} \to \mathbb{F} \cap \mathbb{G} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F} \times \mathbb{G} \xrightarrow{\psi} \mathbb{F} + \mathbb{G} \to \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est exacte.

(d) En déduire la relation de Grassmann.

18. : Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$; E' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et F' un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$. On demande de prouver les relations suivantes :

(a) $\dim f(E') = \dim E' - \dim(E' \cap \operatorname{Ker} f)$ (en particulier $\dim f(E') \leqslant \dim E'$.)
(b) $\dim f^{-1}(F') = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(F' \cap \operatorname{Im} f)$.
(c) $\operatorname{codim}_{\mathbb{E}}\left(f^{-1}(F')\right) = \operatorname{codim}_{\mathbb{F}}(F') - \operatorname{codim}_{\mathbb{F}}(F' + \operatorname{Im} f)$.

19. : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ bijective et F un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{E}$ stable par f, c'est à dire que $f(F) \subset F$.

(a) Montrer que si F est de dimension finie, alors $f(F) = F$.
(b) * Montrer que ceci est faux en dimension infinie : considérer f de $(\mathbb{K}[X])^2$ dans lui-même qui à (P,Q) associe $\left(XP, P(0) + \dfrac{Q - Q(0)}{X}\right)$,et $F = \mathbb{K}[X] \times \{0\}$.

20. : Rang d'une somme.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $\mathbb{E}$ étant de dimension finie. Montrer que :

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$$

et donner un exemple pour chaque cas d'égalité.

21. : Rang d'une composée.
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ (en dimension finie) ;

(a) Montrer
  i. $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} f)$
  ii. $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \leqslant \dim(\operatorname{Im} g)$
  iii. $\dim(\ker(g \circ f)) \leqslant \dim(\ker f) + \dim(\ker g)$ (utiliser le théorème du rang pour la restriction h de f à $\ker(g \circ f)$)
(b) En déduire les inégalités dites "de Sylvester" :

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim \mathbb{F} \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

Étudier les cas d'égalité.
  i. * Montrer plus précisément en utilisant la restriction k de g à $\operatorname{Im} f$ que

$$\begin{aligned} rg(g \circ f) &= rg(f) - \dim \ker g \cap \operatorname{Im} f \\ &= rg(f) + rg(g) - \dim \mathbb{F} + (\dim \ker g - \dim \ker g \cap \operatorname{Im} f) \\ &= rg(g) - \operatorname{codim}_{\mathbb{F}}(\ker g + \operatorname{Im} f) \end{aligned}$$

22. : Composée bijective d'endomorphismes.

(a) Montrer que pour des endomorphismes **en dimension finie, si** $g \circ f$ est bijectif, alors f et g le sont.
deux méthodes : soit utiliser la relation : $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$, montrée à l'exercice précédent, soit montrer que f est injective et conclure.
(b) Soit $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{array} \right.$, trouver $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}$, et montrer que ni f, ni g ne sont bijectifs (le (a) est donc faux en dimension infinie).

23. * : Noyau et image d'une composée.
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$.

(a) Montrer que si F' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(F')\right) &= F' \cap \operatorname{Im} f \\ g^{-1}(g(F')) &= F' + \operatorname{Ker} g \end{aligned}$$

(b) En déduire que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f &= f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \text{ et } \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ f)) \\ \operatorname{Ker}(g \circ f) &= f^{-1}(\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f) \text{ et } \operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f) \end{aligned}$$

(c) En déduire que

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{Ker}(g\circ f) & = & \operatorname{Ker} f \ \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g\cap \operatorname{Im} f=\{\overrightarrow{0}\}\\ \operatorname{Im}(g\circ f) & = & \operatorname{Im} g \ \ \Leftrightarrow \mathbb{F}=\operatorname{Ker} g+\operatorname{Im} f\end{array}$$

(d) En déduire que

$$g\circ f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective, } g \text{ est surjective et } \mathbb{F}=\operatorname{Ker} g\oplus \operatorname{Im} f$$

(e) En déduire aussi qu'en dimension finie :

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{rg}(g\circ f) & = & \operatorname{rg}(f) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g\cap \operatorname{Im} f=\{\overrightarrow{0}\}\\ \operatorname{rg}(g\circ f) & = & \operatorname{rg}(g) \Leftrightarrow \mathbb{F}=\operatorname{Ker} g+\operatorname{Im} f\\ \mathbb{F} & = & \operatorname{Ker} g\oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow ??\end{array}$$

24. : Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$; pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note $N_k=\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ et $I_k=\operatorname{Im}\left(f^k\right)$; Montrer que :

(a) $N_k\subset N_{k+1}$ et $I_{k+1}\subset I_k$

(b) * Si $N_k=N_{k+1}$ alors $\forall q\geqslant k \quad N_q=N_k$ et $N_k\cap I_k=\{\overrightarrow{0}\}$.

(c) * Si $I_k=I_{k+1}$ alors $\forall q\geqslant k \quad I_q=I_k$ et $\mathbb{E}=N_k+I_k$.

(d) * Donner un exemple où $N_k\subsetneq N_{k+1}$ pour tout k.

(e) * Si $\dim\mathbb{E}<\infty$, soient $k_1=\min\{k\in\mathbb{N} \ / \ N_k=N_{k+1}\}$ et $k_2=\min\{k\in\mathbb{N} \ / \ I_k=I_{k+1}\}$; montrer k_1 et k_2 sont finis et égaux (à k) et que $\mathbb{E}=N_k\oplus I_k$.

25. : Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$;

(a) On considère les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl}(\mathbf{A}) & : & \mathbb{E}=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f \qquad (\mathbf{B})\operatorname{Im} f^2=\operatorname{Im} f\\ (\mathbf{A}') & : & \operatorname{Ker} f\cap \operatorname{Im} f=\left\{\overrightarrow{0}\right\} \quad (\mathbf{B}')\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f\end{array}$$

Prouver que $(\mathbf{A})\Leftrightarrow(\mathbf{B})$ et $(\mathbf{A}')\Leftrightarrow(\mathbf{B}')$ (cf. exercice 23).

(b) Soit $f:\left|\begin{array}{c}\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[X]\\ P\mapsto XP\end{array}\right.$ et $g:\left|\begin{array}{c}\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[X]\\ P\mapsto\dfrac{P-P(0)}{X}\end{array}\right.$.

i. Montrer que f vérifie $(\mathbf{A}')$, mais ne vérifie pas $(\mathbf{A})$

ii. Montrer que g vérifie $(\mathbf{A})$, mais ne vérifie pas $(\mathbf{A}')$

(c) On suppose $\dim\mathbb{E}<\infty$. Montrer que : $(\mathbf{B})\Rightarrow(\mathbf{B}')$ et $(\mathbf{A}')\Rightarrow(\mathbf{A})$. Conclusion ?
En déduire que :

$$\mathbb{E}=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f\Leftrightarrow\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} f^2$$

(d) Donner un exemple d'un tel endomorphisme f, autre qu'un projecteur ou qu'une bijection.
Donner un exemple d'un endomorphisme f ne vérifiant pas cette propriété.

26. : Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$, et $f_0\in\mathcal{L}(\operatorname{Im} f)$ la restriction de f à $\operatorname{Im} f$; montrer que

$$\begin{array}{l}\mathbb{E}=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f\Leftrightarrow f_0 \text{ est surjective}\\ \operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Im} f=\left\{\overrightarrow{0}\right\}\Leftrightarrow f_0 \text{ est injective}\\ \mathbb{E}=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f\Leftrightarrow ?\end{array}$$

27. : Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $g\in\mathcal{L}(\mathbb{F},\mathbb{E})$.

Soit f_1 la restriction de f à $\operatorname{Im} g$ pour le départ et $\operatorname{Im} f$ pour l'arrivée, et soit g_1 la restriction de g à $\operatorname{Im} f$ pour le départ et $\operatorname{Im} g$ pour l'arrivée.

(a) Montrer que si $f\circ g\circ f=f$ alors $\operatorname{Im} f\cap\ker g=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E=\operatorname{Im} g+\ker f$.

(b) Montrer que $\left\{\begin{array}{l} f\circ g\circ f=f \\ g\circ f\circ g=g \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} E=\operatorname{Im} g\oplus\ker f, F=\operatorname{Im} f\oplus\ker g \\ f_1 \text{ bijective de réciproque } g_1 \end{array}\right.$

28. * :

(a) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ dont l'image égale le noyau.

(b) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$. Montrer que : $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Im} f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} f\circ f=0 \\ n \text{ est pair} \\ \operatorname{rg} f=\dfrac{n}{2} \end{array}\right.$

(c) Si $n=2p$, soit $(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2,...,\overrightarrow{e}_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Im} f$; il existe donc p vecteurs $\overrightarrow{e}'_i$ tels que $\overrightarrow{e}_i=f(\overrightarrow{e}'_i)$; montrer que $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2,...,\overrightarrow{e}_p,\overrightarrow{e}'_1,\overrightarrow{e}'_2,...,\overrightarrow{e}'_p\right)$ est une base de $\mathbb{E}$ et écrire la matrice de f dans cette base.

29. : Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $f,g\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$ tels que f et g commutent, *i.e.* $f\circ g=g\circ f$.
On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{E}$ est stable par f si $f(F)\subset F$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

(b) Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$, Montrer que $P(f)\left(\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{n}a_kf^k,\text{ sans oublier que } f^0=id_E\right)$ et g commutent. Qu'en déduit-on pour $\operatorname{Ker}(P(f))$ et $\operatorname{Im}(P(f))$?

30. * :

(a) Soit $\mathbb{E}=\mathbb{K}^{\mathbb{K}^*}$ et $\mathbb{P}=\{f\in\mathbb{E}\ /\ f \text{ est paire}\},\mathbb{I}=\{f\in\mathbb{E}\ /\ f\text{ est impaire}\}$; montrer que $\mathbb{E}=\mathbb{P}\oplus\mathbb{I}$ et que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ sont isomorphes.

(b) Soit $\mathbb{E}=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathbb{P}$ le sous-espace constitué des fonctions paires, $\mathbb{I}$ celui constitué des fonctions impaires.

i. Vérifier que $\mathbb{E}=\mathbb{P}\oplus\mathbb{I}$.
On définit une application φ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ par $\varphi(f)(x)=\int_{-x}^{x}f(t)dt$ pour tout $f\in\mathbb{E}$ et tout $x\in\mathbb{R}$.

ii. Vérifier la linéarité de φ ; déterminer $\ker\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$; en déduire φ^2.

iii. En déduire que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ sont isomorphes.

31. * : Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ non réduit à $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$. Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

(a) $f^2=\mathrm{id}_{\mathbb{E}}\Rightarrow f=\pm\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

(b) $f^2=\mathrm{id}_{\mathbb{E}}\Rightarrow\exists\overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0}\in\mathbb{E}\quad/\quad f\left(\overrightarrow{x}\right)=\pm\overrightarrow{x}$

(c) si $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0, a\neq 0$

$$af^2+bf+c\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}}=0\Rightarrow(2af+b\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}})^2=\Delta\,\mathrm{id}_{\mathbb{E}}\Rightarrow f=\left(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$$

(deux assertions)

(d) On suppose $\dim\mathbb{E}=2$.
Si $\exists\overrightarrow{x}\in\mathbb{E}$ tel que $\left(\overrightarrow{x},f\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ est libre et $f^2\left(\overrightarrow{x}\right)=0$, alors $f^2=0$.

32. * :

(a) Lemme : montrer que si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont non réduits à $\{\overrightarrow{0}\}$, $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{x}\mapsto\overrightarrow{0}\}$ (on admet que tout sous-espace possède un supplémentaire).
Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{E})$; montrer que

(b) f est simplifiable à gauche $\Leftrightarrow$ f est inversible à gauche dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})\Leftrightarrow f$ est injectif.

(c) f est simplifiable à droite $\Leftrightarrow$ f est inversible à droite dans $\mathcal{L}(\mathbb{E})\Leftrightarrow f$ est surjectif.
Donc $f\in GL(\mathbb{E})\Leftrightarrow f$ est simplifiable (ou régulière).

33. * : Soient $x_1, ..., x_n$ n éléments distincts de $\mathbb{K}$.
Montrer que l'ensemble des $n-$uplets $(P(x_1), ..., P(x_n))$ pour P décrivant $\mathbb{K}[X]$ est égal à $\mathbb{K}^n$ tout entier.

34. * : Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{E} = \mathbb{K}^I$ telle que $\varphi(x \mapsto 1)$ ne soit pas nulle. Montrer que l'ensemble G des applications constantes de I dans $\mathbb{K}$ est un supplémentaire de $F = \ker \varphi$ dans $\mathbb{E}$.

35. :

    (a) Déterminer la matrice canonique de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ transformant le plan $P : x + y = 0$ en le plan $P' : x + y - z = 0$, le plan $Q : y + z = 0$ en le plan $Q' : -x + y + z = 0$, et le plan $R : x + z = 0$ en le plan $R' : x - y + z = 0$.

    (b) * Montrer que plus généralement, il existe en dimension n un unique endomorphisme transformant n hyperplans donnés, noyaux de n formes linéaires formant une famille libre, en n hyperplans donnés.

36. * : Soit f une application linéaire non nulle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{K}$.

    (a) Montrer qu'il existe un $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ tel que $f(\overrightarrow{e}) = 1$.

    (b) Pour $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de $\mathbb{E}$, on pose $\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})\overrightarrow{y} + f(\overrightarrow{y})\overrightarrow{x} - f(\overrightarrow{x})f(\overrightarrow{y})\overrightarrow{e}$; montrer que $(\mathbb{E}, +, *)$ est un anneau commutatif.

    (c) Résoudre dans $\mathbb{E}^2$: $\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

37. * : Base duale.

    (a) Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de base $(e_1, e_2, ..., e_n)$; pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on définit $f_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ par $f_i(e_j) = \delta_{ij}$; montrer que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{K})$ (appelée *base duale* de $(e_1, e_2, ..., e_n)$).

    (b) On prend ici $\mathbb{E} = \mathbb{K}_{n-1}[X]$; soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $f_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ définie par $f_i(P) = P(x_i)$. Montrer que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{K})$ et déterminer une base $(P_1, P_2, ..., P_n)$ de $\mathbb{E}$ dont $(f_1, f_2, ..., f_n)$ soit la base duale.