

1. : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que $|x - u| = |1 - xu|$, sans utiliser la forme algébrique de u et interpréter géométriquement le résultat.

2. : Montrer que si u et v sont de module 1, alors $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel, sans utiliser la forme algébrique de u et v ; que peut-on dire de $\frac{u+v}{1-uv}$?

3. : Des identités remarquables; les nombres a, b, c, d, u sont des complexes.

(a) Identité de Diophante (3ème siècle av. J.C.)

i. Montrer que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ en passant progressivement du membre de gauche à celui de droite.

ii. Qu'en déduit-on pour l'ensemble des naturels qui sont sommes de deux carrés ?

iii. Application : sachant que $13 = 9 + 4$, et $29 = 25 + 4$, décomposer 377, en somme de 2 carrés de 2 façons différentes.

(b) * Identité de Brahmagupta (mathématicien indien, 628 ap. J.C.), généralisant la précédente :

Montrer que $(a^2 + ub^2)(c^2 + ud^2) = (ac + ubd)^2 + u(ad - bc)^2$ à l'aide des complexes (introduire v , l'une des racines carrées de u).

(c) * Identité d'Euler :

i. Montrer que si u, v, u', v' sont 4 complexes :

$$\left(|u|^2 + |v|^2\right) \left(|u'|^2 + |v'|^2\right) = |uu' - vv'|^2 + |u\bar{v}' + v\bar{u}'|^2$$

$$\left(|u|^2 + |v|^2\right) \left(|u'|^2 + |v'|^2\right) = |uu' - vv'|^2 + |u\bar{v}' + v\bar{u}'|^2$$

ii. Écrire l'identité dite d'Euler, obtenue en écrivant l'identité précédente avec les coordonnées de u, v, u', v' ; qu'en déduit-on sur les naturels qui sont sommes de quatre carrés ?

4. : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$

(a) Prouver $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

(b) Donner une interprétation géométrique.

(c) Soit u une racine carrée de zz' ; prouver en utilisant a) que $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$.

5. : Démontrer à l'aide des complexes que pour tous réels a, b, c :

$$|a + b + c| \sqrt{2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}$$

6. * : CONCOURS GENERAL 1986

(a) Soient z et z' deux nombres complexes. Prouver $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$. Déterminer le cas d'égalité.

(b) Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre nombres complexes. Prouver : $\sum_{i=1}^4 |z_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |z_i + z_j|$. Préciser le cas d'égalité.

RACINES CARREES, ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

7. : Factoriser dans \mathbb{C} l'expression polynomiale : $P(z) = z^3 + (1 + 3i)z^2 + (3i - 2)z - 2$.

8. : Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{R} puis dans \mathbb{C} .

$$4z^3 + 2(-5 + i)z^2 + (8 - i)z - 3(1 + i) = 0.$$

9. : Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

10. : Soit z un complexe n'appartenant pas à \mathbb{R}_- et $u = z + |z|$.

(a) Vérifier que $\operatorname{Re}(u) > 0$.

- (b) Montrer que $u^2 = 2 \operatorname{Re}(u) z$; utiliser cette relation pour déterminer les racines carrées de $15 - 8i$.
 (c) En déduire une expression des racines carrées de z ; comparer avec l'expression du cours.

FORME EXPONENTIELLE

11. : Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

- (a) $z_1 = 1 + \cos \varphi - i \sin \varphi$ et $\frac{1}{z_1}$;
 (b) $z_2 = 1 + i \tan \alpha$, $\frac{z_2}{z_2}$ et $\frac{1}{z_2}$; $z_3 = 1 + i \cot \alpha$.
 (c) $z_4 = \frac{\cos x - i \sin x}{\sin x - i \cos x}$.

12. : Linéariser :

- (a) $P(x) = \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x$.
 réponse : $\frac{1}{32}(\cos 14x + \cos 12x + 2 \cos 10x + 5 \cos 8x + 4 \cos 6x + 7 \cos 4x + 9 \cos 2x + 3)$
 (b) $Q(x) = \sin x \sin^2 2x \sin^3 3x$.

13. :

- (a) Prouver les égalités suivantes en utilisant les nombres complexes : $\sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$ et $\sum_{k=0}^n \frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$
 (b) Généraliser au calcul de : $\sum_{k=0}^n a^k \cos kx$ et $\sum_{k=0}^n a^k \sin kx$ (a réel).

14. Vérifier que $\tan nx = \frac{\operatorname{Im}((1+i \tan x)^n)}{\operatorname{Re}((1+i \tan x)^n)}$. Exprimer $\tan 3x$ et $\tan 4x$ en fonction rationnelle de $\tan x$.

15. :

- (a) Montrer : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + jy + j^2 z = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ (bien sûr $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).
 (b) Calculer : $(x + y + z)(x + jy + j^2 z)(x + j^2 y + jz)$.
 (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ (avec $x, y, z \in \mathbb{R}$).

16. * :

- (a) Déterminer deux complexes z_1 et z_2 sachant que $\begin{cases} z_1 + z_2 = r \in \mathbb{R} \\ \arg(z_1) = \alpha_1 \\ \arg(z_2) = \alpha_2 \end{cases}$.
 (b) Application : un traîneau est tiré par deux chiens reliés à lui par deux cordes attachées en un même point ; le mouvement est rectiligne ; la première corde fait un angle de 20° avec l'axe du traîneau, la deuxième un angle de 30° ; La résultante des forces de traction a une intensité de 300 N ; calculer les intensités des forces de traction de chacun des chiens.

COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

17. : Soient a, b deux complexes distincts ; à tout point M d'affixe $z \neq a$ on fait correspondre $f(M)$ d'affixe $Z = \frac{z-b}{z-a}$; on demande de déterminer géométriquement les ensembles suivants :

- (a) $f^{-1}(Ox) = \{M(z) / Z \text{ est réel}\}$
 (b) $f^{-1}(Oy)$
 (c) $f^{-1}(\text{cercle}(O, 1))$

(d) * $f^{-1}(\text{cercle}(O, k))$

18. Une hyperbole en complexes.

(a) Soit a un complexe non nul. Déterminer en passant aux coordonnées l'ensemble H des points M du plan d'affixe z pour lesquels $(z - a)(z + a)$ est réel. En utilisant les arguments, en déduire une propriété géométrique de cet ensemble.

(b) Soient deux nombres complexes distincts a et b . Déterminer l'ensemble K des points M du plan d'affixe z pour lesquels $(z - a)(z - b)$ est réel (se ramener par translation au cas précédent, faire une figure).

19. : Condition d'équilatéralité et théorème de Napoléon.

Soit ABC un triangle du plan complexe, et soient a, b, c les affixes respectives de A, B, C .

(a) Montrer que ABC est équilatéral et direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$; à quelle condition est-il équilatéral et indirect ? A quelle condition ne faisant plus intervenir j est-il équilatéral ?

(b) * Sur les côtés d'un triangle ABC quelconque et extérieurement à ce triangle, on construit les triangles équilatéraux ABC_1, BCA_1 , et CAB_1 , qui ont pour centres respectifs C', A', B' . Démontrer le théorème de Napoléon, à savoir : $A'B'C'$ est équilatéral. Que représente le centre du triangle $A'B'C'$ pour le triangle ABC ?

20. : On donne $A(a), B(b), C(c)$ avec a, b, c de module 1. Soit $H(h)$ le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) .

Montrer que $h = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{bc}{a} \right)$.

21. * :

(a) Montrer que les 4 points $A(a), B(b), C(c), D(d)$ sont cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow \frac{c-b}{c-a} \div \frac{d-b}{d-a}$ est réel.

(b) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 4 complexes tels que $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$; on pose $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ et $F : \begin{cases} P \rightarrow P \\ M(z) \mapsto M'(f(z)) \end{cases}$; montrer que F transforme des points cocycliques où alignés en des points cocycliques où alignés.

(c) En déduire par exemple que les points-images des solutions de l'équation de l'exercice 27. sont cocycliques et que les résultats de l'exercice 17. sont toujours des cercles ou des droites.

22. En géométrie complexe, une sphère est réunion de droites !

On considère dans \mathbb{C}^3 le sous-ensemble S d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et pour tout λ complexe, la "droite" D_λ de représentation cartésienne $\begin{cases} x + iy = \lambda(1 - z) \\ 1 + z = \lambda(x - iy) \end{cases}$ ainsi que la "droite" $D_\infty \begin{cases} z = 1 \\ x = iy \end{cases}$; montrer que S est la réunion des "droites" D_λ et de la "droite" D_∞ .

Indication : écrire l'équation sous la forme $(x + iy)(x + iy) = (1 - z)(1 + z)$.

RACINES n -IÈMES

23. : Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\sqrt{3} + i$; en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

24. :

(a) Factoriser dans \mathbb{C} les expressions $z^3 + 1$ et $z^4 + 1$.

(b) En déduire des factorisations dans \mathbb{C} de $a^3 + b^3$ et $a^4 + b^4$.

25. : Montrer l'équivalence : u est une racine n -ième de l'unité ssi $u \neq 0$ et $u^{n-1} = \bar{u}$.

26. : Calculer $(2 + i)^6$; en déduire une racine sixième simple de $117 - 44i$, une de $117 + 44i$ et une de $44 + 117i$. Déterminer toutes les racines cubiques de $117 - 44i$.

27. :

(a) Montrer que dans \mathbb{C} : $a^n = b^n \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1] \quad a = e^{\frac{2ik\pi}{n}} b$.

(b) Résoudre dans \mathbb{C} : $27(z - 1)^6 - (z + 1)^6 = 0$.

(c) Réponse : $2 \pm \sqrt{3}$ et $\frac{2 \pm 3i}{4 \pm \sqrt{3}}$.

28. : Résoudre $(z + i)^n = (z - i)^n$

(a) par le calcul.

(b) géométriquement ; construire les images des solutions pour $n = 3, 4, 6$.