1. Tracer dans un même repère orthonormé les trois coniques d'équation réduite : $x^2+\frac{y^2}{2}=1, x^2-\frac{y^2}{2}=1, x^2-\frac{y^2}{2}=-1$ avec leurs foyers et directrices. Déterminer a, b, c, e dans chaque cas.

2. Tracer la courbe d'équation cartésienne : $y^2+2x+2y=1$ et donner ses éléments caractéristiques.

3. Tracer la courbe d'équation cartésienne : $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$.

4. On donne dans le plan rapporté à un repère orthonormé $P(-1,0)$ et $Q(1,0)$; soit (E) le lieu des points M vérifiant $MP+MQ=4$.
   (a) Déterminer l'excentricité, les foyers et les sommets de (E) , la tracer.
   (b) Idem pour (F) : $|MP-MQ|=4$.

5. : Tangentes simples à l'ellipse.
   On donne l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $A(a,0), B(0,b), C(a,b)$; soit I le milieu de $[AC]$ et J le barycentre de $\begin{pmatrix} B & C \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la droite (IJ) est tangente à l'ellipse. Combien de tangentes à l'ellipse ceci permet-il de construire ?
   Indication : le point de tangence est $\left(\dfrac{3}{5}a, \dfrac{4}{5}b\right)$.

6. : Les coniques confocales.
   On désigne par (C_λ) l'ensemble d'équation $\dfrac{x^2}{\lambda}+\dfrac{y^2}{\lambda-1}=1$.
   (a) Etudier la nature de l'ensemble (C_λ) suivant les valeurs de λ et déterminer ses sommets et ses foyers lorsque c'est une conique.
   (b) Montrer qu'en tout point non situé sur les axes passent exactement deux coniques (C_λ) et que les tangentes en ce point sont orthogonales.
   (c) Tracer (C_λ) pour $\lambda=1/4, 1/2, 2, 4$.

7. :
   (a) On pose $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+g$ et on dénomme (C) la courbe d'équation $f(x,y)=0$.
   Montrer que $M_0(x_0,y_0)$ est centre de symétrie de (C) ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.
   (b) Appliquer à (C) : $x^2+8xy-5y^2-28x+14y+3=0$. Nature et éléments caractéristiques de cette conique.

8. Etudier les courbes d'équations polaires :
   (a) $\dfrac{8}{\rho}=4+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$
   (b) $\dfrac{1}{\rho}=1+\cos\theta+\sin\theta$
   (c) $\dfrac{4}{\rho}=2+\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$

9. * : Montrer que la courbe de la fonction f telle que $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ est une hyperbole, dont on donnera l'excentricité, le centre, les asymptotes, les sommets et les foyers (figure).

10. * : Idem avec la fonction $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

11. * : Montrer que la courbe (C) d'équation $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ est incluse dans une conique (C') . Etudier cette conique et tracer (C) et (C') .

12. * : Montrer que la réunion (C) des deux courbes (C_1) d'équation $y=x+\sqrt{x}$ et (C_2) d'équation $y=x-\sqrt{x}$ est une parabole dont on donnera le sommet et le paramètre.

13. * : Montrer que la courbe de paramétrisation : $\left\{ \begin{array}{c} x = \sin t \\ y = \sin(t + \varphi) \end{array} \right.$ pour $0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ est une ellipse dont on donnera les caractéristiques.

14. * : Lieu des points dont les produits des distances à deux droites est constant.

    On donne deux droites sécantes D et D' faisant entre elles un angle de $2\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; le point M se projette en H et H' sur D et D' ; soit (C) le lieu des points M tels que $MH.MH' = C^2$.

    Montrer que (C) est la réunion des deux hyperboles ayant pour asymptotes D et D' et dont la demi-distance focale est $c = \dfrac{2C}{\sin 2\alpha}$.

15. *: On veut inscrire l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans une bande limitée par deux tangentes à l'ellipse ; la direction de la bande est donnée par le vecteur normé (α, β) ; déterminer la demi-largeur de cette bande.

    Réponse : $\sqrt{\beta^2 a^2 + \alpha^2 b^2}$.

16. * : Montrer que la section d'un cylindre de révolution avec un plan est une ellipse ; déterminer l'excentricité de cette ellipse en fonction de l'angle α que fait le plan avec l'axe du cylindre.

17. * : La courbe du seau d'eau.

    Une corde est attachée à une extrémité à un point fixe $A(a, b)$, passe par une poulie fixe $B(-a, -b)$ et est maintenue à la main à l'autre extrémité. Un seau d'eau est suspendu à la corde par une poulie M entre A et B. L'axe Oy est vertical.

    (a) Montrer que la bissectrice de l'angle AMB est verticale.

    (b) En déduire l'équation du lieu de M, et sa nature.

    (c) Faire la liaison avec l'exercice 25 sur les complexes.