CONTINUITÉ

I CONTINUITÉ EN UN POINT

1. : Définir le prolongement par continuité des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$
   (c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$
2. :
   (a) Que dire d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{Q}$?
   (b) En déduire que deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et égales sur $\mathbb{Q}$ sont égales sur $\mathbb{R}$.
3. : Soit f est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f^2 est continue en tout point de $\mathbb{R}$, f ne l'est pas forcément, mais que si f^3 est continue en tout point de $\mathbb{R}$ alors f l'est.
4. : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique et non constante ; montrer que f admet une plus petite période strictement positive.

   Indication : raisonner par l'absurde, noter $\mathcal{T}$ l'ensemble des périodes, et montrer que la borne inférieure de $\mathcal{T} \cap]0,+\infty[$ est nulle ; en déduire que $\mathcal{T}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et conclure.
5. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ x \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui même et que f et f^{-1} ne sont continues en aucun point de $\mathbb{R}$.
6. : Équations fonctionnelles de Cauchy.
   (a) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors,
   $$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$$
   Autrement dit, les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R},+)$ sont les applications linéaires.
   Indications pour $\Rightarrow$:
      i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(nx) = nf(x)$
      ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(nx) = nf(x)$
      iii. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(rx) = rf(x)$
      iv. Conclure en utilisant l'exercice 2 (b).
   (b) En déduire que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*)$ alors,
   $$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{ax} \Leftrightarrow \exists b > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = b^x$$
   (c) En déduire que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ alors,
   $$\forall x,y > 0 \quad f(xy) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x > 0 \quad f(x) = a \ln x$$
   (d) En déduire que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}_+^*)$ alors,
   $$\forall x,y > 0 \quad f(xy) = f(x)f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x > 0 \quad f(x) = x^a$$
7. * :
   (a) $a \neq 0$ et b étant deux réels fixés, montrer que les applications f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+a) = f(x) + b$ pour tout réel x sont les applications de la forme $x \mapsto g(x) + \dfrac{b}{a}x$ où g est une application continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période a.

(b) En déduire toutes les applications continues de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(2x) = 3f(x)$$

8. : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $l = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x))$ et que $l \in \mathbb{R}^*$.

   (a) Montrer que $f(x) \sim lx$ quand $x \to +\infty$.
   (b) Comparer avec le lemme de l'escalier concernant les suites (exercice 11).

II CONTINUITE GLOBALE

1. Généralités

9. : Montrer que la fonction $\sqrt{}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$

   (a) En utilisant le théorème de Heine.
   (b) En appliquant la première définition et en utilisant la relation, à prouver : $0 \leqslant y \leqslant x \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$.

10. : Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est uniformément continue sur $]0, +\infty[$ (avec utilisation du théorème de Heine).

11. : Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

12. : Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et possède une limite finie en $+\infty$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Réciproque ?

13. * : On suppose f lipschitzienne sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$; f est-elle forcément lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$? Et si l'on suppose de plus que f possède une limite finie en $+\infty$?

14. :* Les ensembles constitués des fonctions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels, des sous-anneaux de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?

   (a) Les fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.
   (b) Les fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$.
   (c) Les fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.
   (d) Les fonctions lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}$.
   (e) Les fonctions uniformément continues bornées sur $\mathbb{R}$.

15. * : Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout x_0 de $[0, 1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_0 + n) = l$ (pour le même l).

   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
   (b) Montrer que ce résultat devient faux si l'on suppose seulement f continue sur $\mathbb{R}_+$.

16. * : **Jeu sur une interversion de quantificateurs.**
   On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *nuticonne* en $x_0 \in D_f$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha$$

   (a) Montrer que si f est nuticonne en x_0, alors elle l'est aussi en x_1 et ceci quelque soit x_1.
   (b) Caractériser les fonctions nuticonne en 0 (donc sur $\mathbb{R}$).
   (c) Quelles sont les fonctions *uniformément nuticonnes*, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \alpha > 0 \quad |x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \alpha) \ \ ?$$

2. **AUTOUR DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES**

17. : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I non vide.

(a) Montrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est constante sur I.

(b) Montrer que si $|f|$ est constante sur I, alors f est constante sur I.

(c) Montrer que si f ne prend que des valeurs entières, alors elle est constante sur I (montrer qu'on a le même résultat, en remplaçant "entières" par "rationnelles" ou par "irrationnelles").

(d) Montrer plus généralement que si f prend ses valeurs dans un ensemble de complémentaire dense (par exemple dénombrable) alors elle est constante sur I.

18. : Un théorème du point fixe :
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f([a,b]) \subset [a,b] \quad (a \leqslant b)$

(a) Démontrer que : $\exists c \in [a,b] \quad f(c) = c$.

(b) Montrer que ce résultat est faux si on remplace $[a,b]$ par $]a,b]$, ou si on ne suppose plus f continue sur $[a,b]$

(c) Démontrer que de même, si f est une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $[a,b] \subset f([a,b]) \quad (a \leqslant b)$, alors $\exists c \in [a,b] \quad f(c) = c$.

19. : Déterminer suivant la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation

$$E_\lambda : e^{\lambda x} = x, \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

20. :

(a) Soit f une fonction continue et périodique de période $T > 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f(c+T/2) = f(c)$.

(b) Application : à tout point M d'un cercle, on fait correspondre une grandeur physique (par exemple la température en M) qui varie continûment sur le cercle ; montrer qu'il existe forcément sur le cercle deux points diamétralement opposés où la grandeur physique prend la même valeur.

(c) En déduire par exemple qu'il existe à chaque instant sur la terre deux points antipodaux où la température est la même, et deux points antipodaux où la pression est la même.

(d) Autre application : soit (C) une courbe fermée continue entourant O telle que toute droite passant pas O coupe la courbe en deux points exactement. Montrer qu'il existe une droite passant par O où les deux points d'intersection sont à même distance de O.

21. : Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ et qui atteint sa borne inférieure en un réel a ; montrer qu'alors pour tout réel U il existe un réel c tel que $f(c+U) = f(c)$ (propriété remarquée par Éric Guérin, sup 2004, améliorée par Lévi Caparéda, sup 2008).

22. : Le théorème "des cordes" ; soit f une fonction continue sur $[0,T]$, $T > 0$, n un entier > 0.

(a) On suppose d'abord $f(0) = f(T)$: démontrer qu'il existe $c \in [0, T - T/n]$ tel que $f\left(c + \dfrac{T}{n}\right) = f(c)$.

Indication : poser $g(x) = f\left(x + \dfrac{T}{n}\right) - f(x)$ et calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

(b) $f(0)$ et $f(T)$ sont quelconques ; démontrer qu'il existe $c \in [0, T - T/n]$ tel que le taux d'accroissement de f entre c et $c + T/n$ soit le même que celui entre 0 et T.

(c) Application : une voiture part à l'instant 0 d'un mouvement continu. Au bout d'un temps T, elle a parcouru la distance L ; démontrer que sur la route suivie par la voiture, il existe deux points A et B, distants de $\dfrac{L}{n}$, tels que la voiture ait mis exactement le temps $\dfrac{T}{n}$ pour aller de A à B. Déterminer précisément ces points quand le mouvement est uniformément accéléré.

(d) * : On suppose $f(0) = f(T)$; pour quels réels $U \in]0,T[$, existe-t-il forcément un réel $c \in [0, T - U]$ tel que $f(c+U) = f(c)$?

23. : Rapport entre propriété des valeurs intermédiaires et continuité.

(a) On définit f par $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que l'image par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle, ceci bien que f ne soit pas continue sur $\mathbb{R}$.

(b) * Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ telle que l'image par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle ; montrer que si l'on suppose de plus f injective, alors f est forcément continue.

Première piste : commencer par montrer que f est monotone.

Deuxième piste : supposer que f est discontinue en x_0 ; justifier alors qu'il existe une suite (u_n) tendant vers x_0 telle que $|f(u_n) - f(x_0)| \geqslant 1$; montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{f(x_0)+1, f(x_0)-1\})$ possède forcément une infinité d'éléments.

3. AUTOUR DU THÉORÈME DE WEIERSTRASS

24. Autre démonstration du fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Soit c la borne supérieure des réels u de $[a,b]$ tels que f soit bornée sur $[a,u]$; montrer que $c=b$ et conclure.

(a) Démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et si $\forall x \in [a,b] \quad f(x) > 0$, alors, $\exists \lambda > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geqslant \lambda$.

(b) Montrer que ce résultat est faux si on prend un intervalle ouvert, ou si on prend f non continue.

(c) En déduire que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[a,b]$ et si $\forall x \in [a,b] \quad f(x) > g(x)$, alors, $\exists \lambda > 0 \ / \ \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geqslant \lambda + g(x)$.

25. :

(a) Démontrer qu'une application continue périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes (et qu'elle vérifie donc la propriété démontrée à l'exercice 20.).

(b) * En déduire que si f est une fonction réelle continue sur $[0,T], T>0$, telle que $f(0) = f(T)$, et $T = U+V$ avec $U, V > 0$, il existe $c \in [0,V]$ tel que $f(c) = f(c+U)$ ou bien $c \in [V,T]$ tel que $f(c) = f(c+V)$ (comparer avec ex. 16.)

(c) * Autre application : montrer qu'il existe sur la terre à tout instant deux points distants de 100 km qui sont à même température.

26. : Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$.

(a) Montrer que si f possède une limite finie en $+\infty$, alors f est bornée sur $[0,+\infty[$.

(b) Que dire de la réciproque ?

27. : Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ ayant une limite finie l_1 en $-\infty$ et une limite finie l_2 en $+\infty$.

(a) Montrer que f est bornée.

(b) Montrer que si $l_1 = l_2$, f atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.

28. : On pose $f : x \mapsto x^2 + 2x + 3$; $g : x \mapsto -x^2 - x + 8$ et on définit h par $h(x) = \max(f(x), g(x))$; pourquoi sait-on à l'avance que $h([-3,2]) = [a,b]$? Déterminer a et b.

29. :

(a) Montrer que chacun des énoncés suivants est faux, en donnant un exemple de fonction f ne le vérifiant pas (un dessin suffira) ; I est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathcal{D}_f$.

i. Si $I = [a,b]$ et f monotone sur I, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.

ii. Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.

iii. Si f est continue sur I, alors l'image réciproque d'un intervalle inclus dans $f(I)$ est un intervalle.

iv. Si f est continue sur I et $f(I) = I$, alors $\exists x \in I \ / \ f(x) = x$.

v. Si $f([a,b]) = [a,b]$, alors $\exists x \in [a,b] \ / \ f(x) = x$

(b) Rajouter une condition dans la première partie des énoncés précédents de sorte que la conclusion soit vraie.