FONCTIONS CONVEXES

1. : Montrer que $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}$.

2. : Démonstration directe (sans passer par f' croissante) de $f'' \geqslant 0 \Rightarrow f$ convexe lorsque f est deux fois dérivable.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   Soient $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 \neq x_2$, et les points $M_1 \left| \begin{array}{c} x_1 \\ f(x_1) \end{array} \right.$ et $M_2 \left| \begin{array}{c} x_2 \\ f(x_2) \end{array} \right.$.Déterminer g pour que $y = g(x)$ soit l'équation de la droite $(M_1 M_2)$

   (a) On pose $h(x) = f(x) - g(x) - \lambda (x - x_1)(x - x_2)$. On fixe $x_0 \in]x_1, x_2[$, et on choisit λ de façon à ce que $h(x_0) = 0$.
   Montrer que
   $$(\exists c \in]x_1, x_2[) \ \ h''(c) = 0$$
   en déduire
   $$f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{2} f''(c)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$
   (cette formule est la *formule d'interpolation linéaire*).

   (b) Démontrer $(f'' \geqslant 0$ sur $I) \Rightarrow f$ convexe sur I.

3. * : Démonstration directe de $f'' \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{C}_f$ au dessus de ses tangentes.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sur un intervalle I, et soit $x_0 \in \overset{o}{I}$; on note T la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $M_0 \left| \begin{array}{c} x_0 \\ f(x_0) \end{array} \right.$.
   Soient $M \in \mathcal{C}_f$ et $P \in T$, points d'abscisse x.

   (a) Calculer $g(x) = \overline{PM}$

   (b) Montrer que : $(\exists c \in]x_0, x[) \ \ g(x) = (x - x_0)(f'(c) - f'(x_0))$

   (c) Montrer que : $(\exists d \in]x_0, x[) \ \ g(x) = (x - x_0)(c - x_0) f''(d)$

   (d) Démontrer $(f'' \geqslant 0$ sur $I) \Rightarrow \mathcal{C}_f$ sur I est toujours situé au dessus de ses tangentes.

4. :

   (a) La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ?

   (b) Le produit de deux fonctions convexes positives est-il convexe ?

   (c) Soit f^{-1} la réciproque sur I d'une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que f^{-1} soit convexe.

5. * : Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ un pentagone convexe quelconque inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R dans le plan orienté.
   On pose $2\theta_p = \widehat{\left(\overrightarrow{OA_p}, \overrightarrow{OA_{p+1}}\right)}$ avec $0 \leqslant \theta_p < \pi$ pour $0 < p \leqslant 5$ avec la convention $A_6 = A_1$.

   (a) Démontrer que le périmètre du pentagone est
   $$p = 2R [\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)]$$

   (b) Démontrer que la fonction $x \mapsto -\sin x$ est convexe sur $[0, \pi]$.

   (c) En déduire que $p \leqslant 2R \left[4 \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{4} \right) + \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \right]$

   (d) Montrer que la fonction $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4 \sin \frac{x}{4} + \sin x \end{array} \right.$ admet un maximum absolu sur $]0, \pi[$.

   (e) Déduire des questions précédentes que parmi tous les pentagones convexes inscrits dans un cercle, celui qui a le plus grand périmètre est le pentagone régulier.

6. * : Montrer que f concave positive sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ constante.

7. * : Montrer que si f est continue sur I alors

$$\forall x, y \in I \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \Rightarrow f \text{ convexe sur } I$$

8. * : On pose $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
   Etudier f et montrer qu'elle est convexe sur $\mathbb{R}$ (on pourra remarquer que $f(x) + \dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} \coth \dfrac{x}{2}$, ce qui permet de mettre $f''(x)$ sous la forme $\dfrac{\operatorname{ch} \frac{x}{2}}{\operatorname{sh}^3 \frac{x}{2}} \left(\dfrac{x}{2} - \operatorname{th} \dfrac{x}{2}\right)$).

9. * :

   En vous aidant de la figure ci-dessus, trouver et rédiger une démonstration du fait que si $0 < a \leqslant b$, alors

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{\ln b - \ln a}{b - a} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

   inégalités reliant les moyennes géométrique, logarithmique, et arithmétique de deux réels positifs.