COURBES PLANES

I GENERALITES.

1. : Montrer qu'une courbe dont la tangente passe par un point fixe (i.e. $\overrightarrow{V}(t) = k(t)\,\overrightarrow{OM}(t)$) ne peut être qu'une droite.

2. * **: Une définition de la tangente.**

   (a) Soit $(M(t))$ un arc paramétré C^∞ ; on pose $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ et on dit que la courbe (C) décrite par $M(t)$ possède une tangente en $M_0 = M(t_0)$ si le vecteur normé $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}(t)}{M_0M(t)}$ possède une limite à droite non nulle et une limite à gauche non nulle en t_0 qui sont égales (cas du rebroussement) ou opposées (cas du point ordinaire ou d'inflexion) ; la tangente est alors par définition la droite passant par M_0 dirigée par l'un de ces vecteurs-limites.

   (b) : Démontrer que le premier vecteur dérivé non nul de $\overrightarrow{f}$ en t_0 (s'il existe) dirige la tangente donnée par la définition ci-dessus (on rappelle que si p est l'ordre de ce vecteur dérivé $\overrightarrow{M_0M}(t) = u^p \dfrac{\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)}{p!} + \overrightarrow{o}(u^p)$)

   (c) : Montrer que si l'on prend $x(t) = y(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$, avec $x(0) = y(0) = 0$, la courbe (C) possède bien une tangente en O par la définition ci-dessus, bien que tous les vecteurs dérivés de $\overrightarrow{f}$ en t_0 soient nuls (cf. ex. 8. dérivation).

II. EXEMPLES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES :

3. **La quartique en noeud**.

   (a) Etudier la courbe :
   $$\begin{cases} x = 4t^3 - 3t \\ y = 4\left(t^4 - t^2\right) \end{cases}$$

   (b) Linéariser les expressions de x et y obtenue en posant $t = \cos u$; avec cette paramétrisation en u quelle portion de la courbe précédente obtient-on ?

   (c) * Déterminer les ponts doubles de la courbe et en déterminer une équation cartésienne.

4. **Le bicorne** ; étudier la courbe :
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$$

5. : Pour étudier les asymptotes et les rebroussements : $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{1}{t(t-2)} \end{cases}$.

6. : Pour étudier les rebroussements, les asymptotes, et les points doubles : $\begin{cases} x = \dfrac{2t^2}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t} \end{cases}$.

7. : Une autre : $\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$.

8. : Pour étudier les points singuliers :
   a) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1-t} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$

9. : Idem a)$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1-t^3} \end{cases}$ (ou variante b) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t}{1-t^3} \end{cases}$ montrer que la courbe de b) est image de celle de a) par une symétrie)

10. : * Pour le premier avril. On considère la courbe paramétrée (C) : $\begin{cases} x = \cos t + a\cos\dfrac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases}$

   (a) Réduire l'intervalle d'étude.

   (b) Déterminer les valeurs de a pour que la courbe possède un point singulier ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$) ; montrer que pour les deux valeurs de a obtenues la courbe est en fait la même.

   (c) Etudier la courbe pour l'une de ces valeurs de a.

11. : * Mêmes questions que 10) en échangeant sin et cos dans les équations.

12. : **La quartique piriforme ou goutte d'eau** (*quartique* car son équation cartésienne est du $4^{ème}$ degré, et *piriforme* car elle ressemble à une poire).
Le point P décrivant le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[OA]$ (où A est le point de coordonnées $(a,0)$), soit H le point de la droite $\mathcal{D}$: $x = b$ de même ordonnée que P ; la quartique piriforme Γ est le lieu du point M de la droite (OH) de même abscisse que P. On pose $t =$mesure$\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{\Omega P}}\right)$ où Ω est le centre de (C).

   (a) Calculer en fonction de t les coordonnées x et y de $M \in \Gamma$, ce qui donne une paramétrisation de Γ que vous étudierez. Tracer Γ pour $b = a$.

   (b) Montrer que Γ a pour équation cartésienne :
$$by = \pm x\sqrt{x(a-x)}$$

   (c) Déterminer les points d'inflexion (en valeur approchée) et l'aire englobée par la courbe.

13. * : **Les courbes de Lamé (1795-1870)**.
Ce sont les courbes Γ_α d'équation cartésienne : $|x|^\alpha + |y|^\alpha = 1, \alpha > 0$.

   (a) Montrer qu'on peut se borner à étudier la courbe pour $x, y \geqslant 0$ et que cette portion peut être paramétrée par $M(t) = \begin{cases} x = (\cos t)^\lambda \\ y = (\sin t)^\lambda \end{cases}$ avec $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\lambda = \dfrac{2}{\alpha}$.

   (b) Cas particuliers de courbes connues

      i. Reconnaitre les courbes Γ_1 et Γ_2.

      ii. Montrer que $\Gamma_{1/2}$ est formée de 4 arcs de paraboles.

      iii. la courbe $\Gamma_{2/3}$ est appelée "astroïde".

   (c) Réduire l'intervalle d'étude de $t \mapsto M(t)$

   (d) Etudier la courbe au voisinage de $t = 0$

   (e) Etudier les variations de $t \mapsto M(t)$ et tracer dans un même repère un exemple de courbe caractéristique de chaque cas particulier.

14. * : Démontrer que les courbes de paramétrisations cartésiennes : Γ_1 : $\begin{cases} x = \cos^3 t - \dfrac{1}{2}\sin t \\ y = \sin^3 t - \dfrac{1}{2}\cos t \end{cases}$ et Γ_2 : $\begin{cases} x = \cos t\left(\cos^2 t - 2\right) \\ y = \sin t \cos^2 t \end{cases}$
sont isométriques.

15. * : On considère les courbes de paramétrisations cartésiennes : Γ_1 : $\begin{cases} x = 2\dfrac{\sin 3t}{\cos t} \\ y = \dfrac{\cos 4t}{\cos^2 t} \end{cases}$ et Γ_2 : $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{2} - 3t \\ y = \dfrac{t^4}{4} - 2t^2 + 1 \end{cases}$

   (a) Les étudier ; montrer quelles ont les mêmes points doubles.

   (b) Les différencier au niveau de leurs branches infinies.

III EXEMPLES EN COORDONNÉES POLAIRES :

16. : **Les spirales :**

(a) La spirale d'Archimède (-287;-212)
c'est le lieu d'un point M parcourant une droite D avec une vitesse constante v, la droite D tournant elle même autour de O à vitesse constante ω (cf le sillon d'un disque vinyle).
Montrer qu'on peut prendre pour équation polaire $\rho = \dfrac{v}{\omega}\theta$ et tracer pour $\theta \in [-5\pi, 5\pi]$.

(b) La spirale logarithmique : $\rho = \lambda a^\theta$ avec $a > 0$

i. Montrer que l'angle $\psi = \left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{T}\right)$ est constant.

ii. Montrer que toute rotation d'une spirale logarithmique de centre O est équivalente à une homothétie. En déduire des homothéties laissant globalement invariante une spirale logarithmique.

iii. Tracer pour $\lambda = 1$ et $a = 2^{\frac{1}{2\pi}}$.

(c) La spirale hyperbolique : $\rho = \dfrac{a}{\theta}$; $\theta > 0$
Etudier de façon approfondie la branche infinie quand $\theta \xrightarrow{>} 0$; tracer pour $a = \dfrac{2}{\pi}$.

(d) La spirale de Fermat : $\rho^2 = \theta$
Tracer la portion de courbe pour $\theta \in [0, 5\pi]$

17. : Une personne avance à vitesse constante vers un point O sur un plateau tournant lui même à vitesse constante autour de O. Montrer que la trajectoire de la personne dans le repère fixe est une spirale d'Archimède.

18. : **La lemniscate de Bernoulli (1654-1705)**
Remarque : lemniscate est un nom générique pour les courbes en forme de huit.
Soient $F \left| \begin{array}{l} a \\ 0 \end{array} \right.$ et $F' \left| \begin{array}{l} -a \\ 0 \end{array} \right.$. La lemniscate de Bernoulli est le lieu des points tels que $MF.MF' = a^2$.

(a) Montrer qu'on peut prendre comme équation polaire : $\rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$.

(b) Etudier et tracer cette courbe.
Remarque : plus généralement, les courbes $MF.MF' = cte$ sont les *ovales de Cassini.*

19. * : **La cissoïde de Dioclès (-600)**
Soit $A \left| \begin{array}{l} a \\ 0 \end{array} \right.$ et $(\mathcal{D}_0)$ la droite d'équation $x = a$. $(\mathcal{C}_0)$ est le cercle de diamètre $[OA]$. Une droite variable $(\mathcal{D})$ passant par O coupe $(\mathcal{C}_0)$ en N et $(\mathcal{D}_0)$ en P. La cissoïde de Dioclès est le lieu $(\mathcal{C})$ des points M vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP}$.

(a) Montrer qu'on peut prendre $f : \theta \mapsto a\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ pour avoir une équation polaire du type $\rho = f(\theta)$ et effectuer le tracé.

(b) Soit $B \left| \begin{array}{l} 0 \\ 2a \end{array} \right.$; C le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec (AB) et X le point d'intersection de (OC) avec $(\mathcal{D}_0)$.
Calculer les coordonnées de X. Pourquoi Dioclès a-t-il été récompensé par les dieux qui souhaitaient que l'autel qui leur était dédié ait un volume multiplié par deux ?
C'est le fameux problème de la duplication du cube.

20. * : **La trisectrice de Mac-Laurin**
Soit $A \left| \begin{array}{l} 2a \\ 0 \end{array} \right.$, $(\mathcal{D})$ une droite variable passant par O et I le point de $(\mathcal{D})$ tel que $OI = IA$. La courbe $(\mathcal{C})$ est le lieu du point M de $(\mathcal{D})$ distinct de I et tel que $MA = AI$.

(a) Montrer que $(\mathcal{C})$ a pour équation polaire $\rho = a\left(4\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$ et tracer.

(b) Justifier le nom de trisectrice donné à cette courbe.

(c) En donner une autre définition à partir du cercle de centre $B \left| \begin{array}{l} 4a \\ 0 \end{array} \right.$ passant par O, et de la droite $x = -2a$

21. * : **La strophoïde de Newton**
Soit $A \left| \begin{array}{l} a \\ 0 \end{array} \right.$ et $(\mathcal{D})$ une droite variable passant par A. $(\mathcal{D})$ coupe l'axe des ordonnées en P. $(\mathcal{C})$ est le lieu des points M de la droite $(\mathcal{D})$, tels que $PM = OP$. Montrer que $(\mathcal{C})$ a pour équation polaire $\rho = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ et tracer.

22. * : **La quadratrice de Dinostrate.**

 (a) Montrer que la courbe d'équation cartésienne : $y = x\cot x$ et la courbe d'équation polaire : $\rho = \dfrac{\theta}{\sin\theta}$ sont images l'une de l'autre par une rotation.

 (b) Etudier et tracer la première, en déduire la seconde.

23. : **La serpentine.**

 (a) Etudier la courbe paramétrée (C_1) : $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{t}{1+t^2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{t^3}{1+t^2}} \end{cases}$.

 (b) Etudier la courbe en polaires (C_2) : $\rho = \sqrt{\tan\theta}$.

 (c) Rapport entre (C_1) et (C_2) ?

24. : **Le trêfle.**
 Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = 1 + \cos 3\theta + \sin^2 3\theta$.

25. * : **La scyphoïde.**

 (a) Etudier la courbe paramétrée (C_1) : $\begin{cases} x = \dfrac{2t^2}{1-t^4} \\ y = \dfrac{2t^3}{1-t^4} \end{cases}$; on étudiera bien la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

 (b) Etudier la courbe en polaires (C_2) : $\rho = \tan 2\theta \sin\theta$.

 (c) Montrer que les deux courbes sont identiques.

26. * : **la néphroïde de Freeth.**

 (a) Etudier la courbe en polaires (C_1) : $\rho = \sin\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1}{2}$.

 (b) Etudier la courbe en polaires (C_2) : $\rho = \cos\theta + \cos\dfrac{\theta}{3}$.

 (c) Montrer que les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre (on pourra utiliser mathematica).

27. * Courbes invariantes par rotation.

 (a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période α ; montrer que la courbe (C_0) d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ est invariante par rotation de centre O et d'angle α.

 (b) On considère maintenant la courbe paramétrée (C) définie par $\begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\cos u\,du \\ y(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\sin u\,du \end{cases}$. Montrer que cette courbe est aussi invariante par une rotation d'angle α dont on précisera le centre.
 Indication : poser $z(t) = x(t) + iy(t)$ et effectuer le changement de variable $v = u - \alpha$.

 (c) Tracer (C_0) et (C) à la machine pour $f(t) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right) + \cos\left(\dfrac{10\pi}{3}t\right)$ ainsi qu'un autre exemple de votre goût.

IV. PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES

28. Vérifier que si f est une fonction numérique, la courbure en un point $(x_0, f(x_0))$ vérifiant $f'(x_0) = 0$ de la courbe de f est égale à $f''(x_0)$.