

COURBES PLANES**I GENERALITES.**

1. : Montrer qu'une courbe dont la tangente passe par un point fixe (i.e. $\vec{V}(t) = k(t) \overrightarrow{OM}(t)$) ne peut être qu'une droite.

2. * : **Une définition de la tangente.**

(a) Soit $(M(t))$ un arc paramétré C^∞ ; on pose $\vec{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ et on dit que la courbe (C) décrite par $M(t)$ possède une tangente en $M_0 = M(t_0)$ si le vecteur normé $\frac{\overrightarrow{M_0M}(t)}{M_0M(t)}$ possède une limite à droite non nulle et une limite à gauche non nulle en t_0 qui sont égales (cas du rebroussement) ou opposées (cas du point ordinaire ou d'inflexion) ; la tangente est alors par définition la droite passant par M_0 dirigée par l'un de ces vecteurs-limites.

(b) : Démontrer que le premier vecteur dérivé non nul de \vec{f} en t_0 (s'il existe) dirige la tangente donnée par la définition ci-dessus (on rappelle que si p est l'ordre de ce vecteur dérivé $\overrightarrow{M_0M}(t) = u^p \frac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!} + \vec{o}(u^p)$)

(c) : Montrer que si l'on prend $x(t) = y(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$, avec $x(0) = y(0) = 0$, la courbe (C) possède bien une tangente en O par la définition ci-dessus, mais que \vec{f} ne possède aucun vecteur dérivé non nul en t_0 (cf. ex. 8. dérivation).

II. EXEMPLES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES :

3. **La quartique en noeud.**

(a) Etudier la courbe :

$$\begin{cases} x = 4t^3 - 3t \\ y = 4(t^4 - t^2) \end{cases}$$

(b) Linéariser les expressions de x et y obtenue en posant $t = \cos u$; avec cette paramétrisation en u quelle portion de la courbe précédente obtient-on ?

(c) * Déterminer les ponts doubles de la courbe et en déterminer une équation cartésienne.

4. **Le bicorné** ; étudier la courbe :

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases}$$

5. : Pour étudier les asymptotes et les rebroussements : $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = \frac{1}{t(t-2)} \end{cases}$.

6. : Pour étudier les rebroussements, les asymptotes, et les points doubles : $\begin{cases} x = \frac{2t^2}{1+t^3} \\ y = \frac{t}{1+t} \end{cases}$.

7. : Une autre : $\begin{cases} x = t^2 + \frac{2}{t} \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

8. : Pour étudier les points singuliers :

$$\text{a) } \begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t}{1-t} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{1+t^3}{1+t^3} \end{cases}$$

9. : Idem a) $\begin{cases} x = \frac{1}{1-t^2} \\ y = \frac{1}{1-t^3} \end{cases}$ (ou variante b) $\begin{cases} x = \frac{1}{1-t^2} \\ y = \frac{1}{1-t^3} \end{cases}$ montrer que la courbe de b) est image de celle de a) par une symétrie)

10. : Pour le premier avril. On considère la courbe paramétrée $(C) : \begin{cases} x = \cos t + a \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases}$

- Réduire l'intervalle d'étude.
- Déterminer les valeurs de a pour que la courbe possède un point singulier ($\vec{v} = \vec{0}$) ; montrer que pour les deux valeurs de a obtenues la courbe est en fait la même.
- Etudier la courbe pour l'une de ces valeurs de a .

11. : Mêmes questions que 7) en échangeant sin et cos dans les équations.

12. : **La quartique piriforme ou goutte d'eau** (*quartique* car son équation cartésienne est du 4^{ème} degré, et *piriforme* car elle ressemble à une poire).

Le point P décrivant le cercle (C) de diamètre $[OA]$ (où A est le point de coordonnées $(a, 0)$), soit H le point de la droite $\mathcal{D} : x = b$ de même ordonnée que P ; la quartique piriforme Γ est le lieu du point M de la droite (OH) de même abscisse que P . On pose $t = \text{mesure}(\widehat{i, \Omega P})$ où Ω est le centre de (C) .

- Calculer en fonction de t les coordonnées x et y de $M \in \Gamma$, ce qui donne une paramétrisation de Γ que vous étudierez. Tracer Γ pour $b = a$.
- Montrer que Γ a pour équation cartésienne :

$$by = \pm x \sqrt{x(a-x)}$$

- Déterminer les points d'inflexion (en valeur approchée) et l'aire englobée par la courbe.

13. * : **Les courbes de Lamé (1795-1870).**

Ce sont les courbes Γ_α d'équation cartésienne : $|x|^\alpha + |y|^\alpha = 1, \alpha > 0$.

- Montrer qu'on peut se borner à étudier la courbe pour $x, y \geq 0$ et que cette portion peut être paramétrée par

$$M(t) = \begin{cases} x = (\cos t)^\lambda \\ y = (\sin t)^\lambda \end{cases} \text{ avec } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \lambda = \frac{2}{\alpha}.$$

- Cas particuliers de courbes connues
 - Reconnaitre les courbes Γ_1 et Γ_2 .
 - Montrer que $\Gamma_{1/2}$ est formée de 4 arcs de paraboles.
 - la courbe $\Gamma_{2/3}$ est appelée "astroïde".
- Réduire l'intervalle d'étude de $t \mapsto M(t)$
- Etudier la courbe au voisinage de $t = 0$
- Etudier les variations de $t \mapsto M(t)$ et tracer dans un même repère un exemple de courbe caractéristique de chaque cas particulier.

14. * : Démontrer que les courbes de paramétrisations cartésiennes : $\Gamma_1 : \begin{cases} x = \cos^3 t - \frac{1}{2} \sin t \\ y = \sin^3 t - \frac{1}{2} \cos t \end{cases}$ et $\Gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t (\cos^2 t - 2) \\ y = \sin t \cos^2 t \end{cases}$ sont isométriques.

15. * : On considère les courbes de paramétrisations cartésiennes : $\Gamma_1 : \begin{cases} x = 2 \frac{\sin 3t}{\cos 4t} \\ y = \frac{\cos 4t}{\cos^2 t} \end{cases}$ et $\Gamma_2 : \begin{cases} x = \frac{t^3}{2} - 3t \\ y = \frac{t^4}{4} - 2t^2 + 1 \end{cases}$

- Les étudier ; montrer quelles ont les mêmes points doubles.
- Les différencier au niveau de leurs branches infinies.

III EXEMPLES EN COORDONNÉES POLAIRES :

16. : **Les spirales :**

(a) La spirale d'Archimède (-287;-212)

c'est le lieu d'un point M parcourant une droite D avec une vitesse constante v , la droite D tournant elle-même autour de O à vitesse constante ω (cf le sillon d'un disque vinyle).

Montrer qu'on peut prendre pour équation polaire $\rho = \frac{v}{\omega}\theta$ et tracer pour $\theta \in [-5\pi, 5\pi]$.

(b) La spirale logarithmique : $\rho = \lambda a^\theta$ avec $a > 0$

i. Montrer que l'angle $\psi = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{T})$ est constant.

ii. Montrer que toute rotation d'une spirale logarithmique de centre O est équivalente à une homothétie. En déduire des homothéties laissant globalement invariante une spirale logarithmique.

iii. Tracer pour $\lambda = 1$ et $a = 2^{\frac{1}{2\pi}}$.

(c) La spirale hyperbolique : $\rho = \frac{a}{\theta}$; $\theta > 0$

Etudier de façon approfondie la branche infinie quand $\theta \rightarrow 0$; tracer pour $a = \frac{2}{\pi}$.

(d) La spirale de Fermat : $\rho^2 = \theta$

Tracer la portion de courbe pour $\theta \in [0, 5\pi]$

17. * : Une personne avance à vitesse constante vers un point O sur un plateau tournant lui-même à vitesse constante autour de O . Montrer que la trajectoire de la personne dans le repère fixe est une spirale d'Archimède.

18. : **La lemniscate de Bernoulli (1654-1705)**

remarque : lemniscate est un nom générique pour les courbes en huit.

Soient $F \left| \begin{array}{c} a \\ 0 \end{array} \right.$ et $F' \left| \begin{array}{c} -a \\ 0 \end{array} \right.$. C'est le lieu des points tels que $MF.MF' = a$.

(a) Montrer qu'on peut prendre comme équation polaire : $\rho = a\sqrt{2\cos(2\theta)}$.

(b) Etudier et tracer cette courbe.

Remarque : plus généralement, les courbes $MF.MF' = cte$ sont les *ovales de Cassini*.

19. * : **La cissoïde de Dioclès (-600)**

Soit $A \left| \begin{array}{c} a \\ 0 \end{array} \right.$ et (\mathcal{D}_0) la droite d'équation $x = a$. (\mathcal{C}_0) est le cercle de diamètre $[OA]$. Une droite variable (\mathcal{D}) passant par O coupe (\mathcal{C}_0) en N et (\mathcal{D}_0) en P . La cissoïde de Dioclès est le lieu (\mathcal{C}) des points M vérifiant $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP}$.

(a) Montrer qu'on peut prendre $f : \theta \mapsto a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$ pour avoir une équation polaire du type $\rho = f(\theta)$ et effectuer le tracé.

(b) Soit $B \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2a \end{array} \right.$; C le point d'intersection de (\mathcal{C}) avec (AB) et X le point d'intersection de (OC) avec (\mathcal{D}_0) .

Calculer les coordonnées de X . Pourquoi Dioclès a-t-il été récompensé par les dieux qui souhaitaient que l'autel qui leur était dédié ait un volume multiplié par deux ?

C'est le fameux problème de la duplication du cube.

20. * : **La trisectrice de Mac-Laurin**

Soit $A \left| \begin{array}{c} 2a \\ 0 \end{array} \right.$, (\mathcal{D}) une droite variable passant par O et I le point de (\mathcal{D}) tel que $OI = IA$. La courbe (\mathcal{C}) est le lieu du point M de (\mathcal{D}) distinct de I et tel que $MA = AI$.

(a) Montrer que (\mathcal{C}) a pour équation polaire $\rho = a \left(4 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right)$ et tracer.

(b) Justifier le nom de trisectrice donné à cette courbe.

(c) En donner une autre définition à partir du cercle de centre $B \left| \begin{array}{c} 4a \\ 0 \end{array} \right.$ passant par O , et de la droite $x = -2a$

21. * : **La strophoïde de Newton**

Soit $A \left| \begin{array}{c} a \\ 0 \end{array} \right.$ et (\mathcal{D}) une droite variable passant par A . (\mathcal{D}) coupe l'axe des ordonnées en P . (\mathcal{C}) est le lieu des points M de la droite (\mathcal{D}) , tels que $PM = OP$. Montrer que (\mathcal{C}) a pour équation polaire $\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ et tracer.

22. * : **La quadratrice de Dinostrate.**

- (a) Montrer que la courbe d'équation cartésienne : $y = x \cot x$ et la courbe d'équation polaire : $\rho = \frac{\theta}{\sin \theta}$ sont images l'une de l'autre par une rotation.
- (b) Etudier et tracer la première, en déduire la seconde.

23. : **La serpentine.**

(a) Etudier la courbe paramétrée (C_1) :
$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{t}{1+t^2}} \\ y = \sqrt{\frac{t^3}{1+t^2}} \end{cases} .$$

- (b) Etudier la courbe en polaires (C_2) : $\rho = \sqrt{\tan \theta}$.
- (c) Rapport entre (C_1) et (C_2) ?

24. : **Le trèfle.**

Etudier et tracer la courbe d'équation polaire : $\rho = 1 + \cos 3\theta + \sin^2 3\theta$.

25. * : **La scyphoïde.**

(a) Etudier la courbe paramétrée (C_1) :
$$\begin{cases} x = \frac{2t^2}{1-t^4} \\ y = \frac{2t^3}{1-t^4} \end{cases} ;$$
 on étudiera bien la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

- (b) Etudier la courbe en polaires (C_2) : $\rho = \tan 2\theta \sin \theta$.
- (c) Montrer que les deux courbes sont identiques.

26. * : **la néphroïde de Freeth.**

(a) Etudier la courbe en polaires (C_1) : $\rho = \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}$.

(b) Etudier la courbe en polaires (C_2) : $\rho = 2 \left(\cos \theta + \cos \frac{\theta}{3} \right)$.

- (c) Montrer que les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre (on pourra utiliser mathematica).