DÉRIVATION

1. : Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes, et tracer les courbes au voisinage de 0 ; quelle est la morale de l'histoire ?
   (a) $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
   (b) $x \mapsto xe^{-|x|}$
   (c) $x \mapsto \cos\sqrt{x}$
   (d) $x \mapsto \sqrt{\sin(x^4)}$

2. : Montrer que $f : \left| \begin{array}{l} x \neq 0 \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. : Sachant que $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$, démontrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{l} x \neq 0 \mapsto \dfrac{\sin x}{x} \\ 0 \mapsto 1 \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

4. * : Sachant que $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right)$, montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, non dérivable en 0 ; tracer la courbe.

5. * : Soit $f : x \mapsto x^3 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que $f(x) = o\left(x^2\right)$, mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

6. : Applications de la petite règle de L'Hospital ; Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{e\ln x - x}{x-e}$; $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$; $\displaystyle\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$; $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^r-a^r}{x^s-a^s}$; $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a\cos x - x\cos a}{\cos x^2 - \cos ax}$; $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\cos x^3 - \cos a^3}{\cos a^2x - \cos ax^2}$; $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x^n-a^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, et f dérivable en a.

7. :
   (a) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$. Déterminer $\mathcal{D}_f$. Etudier la dérivabilité de f. Calculer f'.
   (b) $g : x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$. Déterminer $\mathcal{D}_g$. Etudier la dérivabilité de g. Calculer g'.
   (c) On pose alors $f_1 = \ln$ puis par récurrence : $f_n = \ln \circ f_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathcal{D}_{f_n}$. Etudier la dérivabilité de f_n. Calculer $f_n^{'}$.

8. * : Exemple de fonction non nulle dont toutes les dérivées sont nulles en un même point.
   (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ quand $x \to 0$.
   (b) On pose $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
      i. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une fraction rationnelle F_n (quotient de 2 polynômes) telle que
      $$\forall x \neq 0 \quad f^{(n)}(x) = F_n(x)\, e^{-\frac{1}{x^2}}$$
      ii. Montrer que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0)$ existe et vaut 0.
   (c) Que peut-on en déduire sur la classe de f ?

9. :
   (a) α est un réel > 0 ; on pose $f(x) = x^\alpha$; montrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ ssi α est entier ou $\alpha > n$.
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$; montrer que f^2 et f^3 sont C^1 sur $[0,+\infty[$ mais pas f ; donner de même un exemple de fonction qui n'est pas C^2 sur $[0,+\infty[$ telle que f^2 et f^3 le soient.

10. * : On pose $f(x) = x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha>0$

(b) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha>1$

(c) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha>2$

(d) Généraliser.

11. : Newton à partir de Leibniz ; pour a,b dans $\mathbb{R}$ on pose $f(x)=e^{ax}$ et $g(x)=e^{bx}$ et $h=fg$; appliquer la formule de Leibniz à h et en déduire la formule du binôme.

12. : Soit $f:x\mapsto (x-a)^n\,(x-b)^n$ où a et b sont deux réels.

(a) A l'aide de la formule de Leibniz, déterminer $f^{(n)}(x)$.

(b) Calculer d'une autre façon $f^{(n)}(x)$ lorsque $a=b$.

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

13. * : On pose $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$;

(a) Montrer à l'aide de la formule de Leibniz que pour $0\leqslant p\leqslant n$:

$$(x-1)\,f^{(p+1)}(x)=(n+1)\,n...\,(n-p+1)\,x^{n-p}-(p+1)\,f^{(p)}(x)$$

(b) En déduire que $\sum\limits_{k=p}^{n}k\,(k-1)\,...\,(k-p+1)=\dfrac{(n+1)\,n...\,(n-p+1)}{p+1}$.

14. * : On définit les fonctions f_n pour $n\in\mathbb{N}$ par : $f_n\left(x\right)=x^n\left(1-x\right)^n$.

(a) Calculer suivant les valeurs de $p\in\mathbb{N}$, $f_n^{(p)}\left(0\right)$.

(b) En déduire les valeurs de $f_n^{(p)}\left(1\right)$.

(c) On pose alors $g_n:x\mapsto\left(1-x^2\right)^n$; calculer $g_n^{(p)}\left(-1\right)$ et $g_n^{(p)}\left(1\right)$ en montrant que $g_n\left(x\right)=cf_n\left(ax+b\right)$.

15. * : les polynômes d'HERMITE.

(a) On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad h_n\left(x\right)=\left(-1\right)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

(b) Calculer $h_0\left(x\right),h_1\left(x\right),h_2\left(x\right),h_3\left(x\right)$.

(c) Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer $h_n\left(x\right)$ connaissant $h_{n-1}\left(x\right)$ et en déduire que h_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients entiers. Soit H_n le polynôme formel associé à h_n (appelé $n^{i\grave{e}me}$ polynôme d'Hermite).

(d) Montrer la relation de récurrence double: $H_n=2XH_{n-1}-2\left(n-1\right)H_{n-2}$.

(e) Montrer la relation différentielle : $H_n^{''}-2XH_n'+2nH_n=0$.

(f) Résoudre l'équation différentielle : $y"-2xy'+2ny=0$

THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

16. :

(a) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit p le nombre de racines de f sur I, et p' le nombre de racines de f' sur I. Quelle inégalité déduite du théorème de Rolle relie p et p' ?

(b) Soit f n-fois dérivable sur I admettant $n+1$ racines distinctes sur I.
Que dire de $f^{(n)}$?

17. (application du 16 a))

(a) Montrer que le polynôme dérivé d'un polynôme réel scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$; est-ce encore exact si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

(b) Soit P un polynome réel, q et q' désignent la somme des ordres des racines réelles de P et de P' ; montrer que $q' \geqslant q - 1$.

(c) En déduire que le polynôme dérivé d'un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$ est scindé sur $\mathbb{R}$; redémontrer par exemple que le polynôme de Legendre $D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

18. : Démontrer que $X^n + pX + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair, et plus de trois racines réelles si n est impair.

19. : Généralisations du théorème de Rolle.

(a) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\left(\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = l \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \ / \quad f'(c) = 0$$

Méthode 1 : utiliser l'exercice 21. sur la continuité.

Méthode 2 : se ramener au théorème de Rolle usuel en utilisant $g(x) = f(\tan x)$.

(b) Soit f dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b \in \mathbb{R}$; Montrer que

$$\left(\lim_{a} f = \lim_{b} f = +\infty\right) \Rightarrow \exists c \in]a, b[\ / \quad f'(c) = 0$$

Pour le cas général voir l'exercice 32.

20. : En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes ; dans chaque cas, on tracera les trois courbes correspondantes.

(a) Si $x > -1$

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \text{ (inégalités de Néper, à connaître)}$$

(bien séparer les cas $x \leqslant 0$, et $x \geqslant 0$)

(b) Si $0 \leqslant x < 1$ alors $x \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; quelle inégalité a-t-on pour $-1 < x \leqslant 0$? En déduire que pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \sin x \leqslant x$.

(c) Si $x \geqslant 0$ alors $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$; quelle inégalité a-t-on pour $x \leqslant 0$?

21. : Montrer que si f est de classe C^1 en 0 avec $f'(0) = 1$, et (u_n) et (v_n) sont deux suites de limite nulle, alors

$$f(u_n) - f(v_n) \sim u_n - v_n$$

Appliquer à l'exercice 48 sur les suites.

22. : Redémontrer l'équivalence (cf. ex. 5. continuité, équation de Cauchy) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$$

en supposant cette fois f dérivable sur $\mathbb{R}$.

23. : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; montrer les équivalences :

f est impaire $\Leftrightarrow f'$ est paire et $f(0) = 0$
f est paire $\Leftrightarrow f'$ est impaire
f est périodique $\Leftrightarrow f'$ est périodique et f est bornée

24. : * Démonstration de l'équivalence $f \nearrow \Longleftrightarrow f' \geqslant 0$ sans utiliser le théorème des accroissements finis.

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et I un intervalle inclus dans D_f; on dit que f est croissante EN un point $x_0 \in D_f$ si au voisinage à gauche de x_0 $f \leqslant f(x_0)$ et au voisinage à droite, $f \geqslant f(x_0)$; plus précisément, cela s'écrit :

$$\exists \alpha > 0 \ / \quad \forall x \in D_f \ \begin{cases} x_0 - \alpha < x \leqslant x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) \\ x_0 \leqslant x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) \end{cases}$$

(a) Montrer que si $[a,b] \subset D_f$, $a \leqslant b$ et f croissante en tout point de $[a,b]$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
Indication : soit c la borne supérieure de $\{x \in [a,b] \ / \ f(x) \geqslant f(a)\}$; montrer que $f(c) \geqslant f(a)$ puis que $c = b$.

(b) En déduire que f est croissante sur I ssi la restriction de f à I est croissante en tout point de I ; remarquer que ce théorème serait faux si on ne supposait pas I intervalle.

(c) Démontrer que si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) > 0$, alors f est croissante en x_0.

(d) Montrer que f est croissante sur I intervalle ssi $g : x \mapsto f(x) + ax$ est croissante sur I pour tout $a > 0$.

(e) Montrer enfin que si f est dérivable sur I intervalle, alors f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I.

25. :

(a) Soit f une fonction polynomiale de degré 2. Quel est en fonction de a et b le réel c tel que $(f(b) - f(a)) = (b-a) f'(c)$?

(b) Donner une interprétation géométrique de ce résultat concernant la tangente à la parabole.

(c) Dans un mouvement uniformément accéléré, à quel instant la vitesse instantanée est-elle égale à la vitesse moyenne entre t_1 et t_2 ?

(d) * Réciproque : déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telle pour tous a et b réels

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (1)$$

Indications : montrer f deux fois dérivable, dériver (1) par rappport à b puis a et ajouter.

26. : En remarquant que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ ne s'annule jamais, montrer que le théorème de Rolle (et donc également celui des accroissements finis) ne s'étend pas aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

27. : Le théorème des accroissements finis généralisé, et la (grande) règle de l'Hospital :

(a) Soient f et g continues sur $[a,b]$, $(a \neq b)$ et dérivables sur $]a,b[$. Pour $x \in [a,b]$, on pose

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(x) - f(a) & f(b) - f(a) \\ g(x) - g(a) & g(b) - g(a) \end{vmatrix}$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\begin{vmatrix} f'(c) & f(b) - f(a) \\ g'(c) & g(b) - g(a) \end{vmatrix} = 0$. <u>Remarque</u> : on a donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ si ces expressions sont définies.

(b) Soient f et g dérivables sur $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, g et g' jamais nulles sur $V \setminus \{x_0\}$ et telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

ce résultat est connu sous le nom de "grande règle de l'Hospital". Appliquer à $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{th} x - \tan x}$.

(c) <u>* Application</u> 1 : Montrer, en appliquant $n-1$ fois la grande règle de L'Hospital, que si f est n fois dérivable au voisinage de 0, et si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n$, alors $f(x) = o(x^n)$ quand $x \to 0$. Remarque : ceci redémontre d'une autre façon le théorème de Taylor-Young.

(d) * Application 2 : (cf. intégration d'un DL) Montrer que si f et g sont dérivables au voisinage de x_0 et nulles en x_0 alors

$$f' = o(g') \text{ en } x_0 \Rightarrow f = o(g) \text{ en } x_0$$

INJECTIVITÉ ; FONCTIONS RÉCIPROQUES

28. : Soit f une application $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injective, f^{-1} sa fonction réciproque ; déterminer $g^{-1}(x)$ dans les cas suivants :
    (a) $g(x) = f(x) + a$
    (b) $g(x) = f(x+a)$
    (c) $g(x) = af(x)$ avec $a \neq 0$
    (d) $g(x) = f(ax)$ avec $a \neq 0$
    (e) $g(x) = f(e^x)$
    (f) A quel cas général les cas (b),(d),(e) appartiennent-ils ? Et les cas (a) et (c) ?

29. : Soit f une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, avec $D_f = I, f(I) = J$, telle que pour toute suite (u_n) d'éléments de I, la convergence de la suite $(f(u_n))$ implique celle de la suite (u_n).
    (a) Montrer par l'absurde que f est injective, puis que f^{-1} est continue sur J.
    (b) En déduire que si J est un intervalle, f est une bijection continue de I sur J.

30. * : On se pose la question de savoir si $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$.
    (a) Un exemple ; on pose $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$ .Exprimer y en fonction de x ; calculer $\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$ en fonction de x et comparer avec $\dfrac{dy}{dx}$; calculer $\dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$ en fonction de x et comparer avec $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.
    (b) On donne $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ avec f et g C^2, f bijective , $h = g \circ f^{-1}$; exprimer à l'aide de f et g et en fonction de t, $\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$ et $\dfrac{dy}{dx} = h'(x)$, puis $\dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2} = h''(x)$.

31. * : Théorème de Darboux. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
    (a) Montrer que si f' ne s'annule pas sur I, alors f est injective sur I, puis en utilisant un théorème du cours, montrer que f' garde un signe constant sur I.
    (b) Montrer le théorème de Darboux : "si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur I, c'est-à-dire que l'image de tout intervalle de I est un intervalle."
    (c) En déduire un exemple (autre que celui de l'exercice 21. de la série continuité globale) de fonction non continue qui vérifie cependant le théorème des valeurs intermédiaires.

32. * : Théorème de Rolle généralisé. Soit f dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{b} f$.
    (a) Montrer à l'aide du TVI que f n'est pas injective sur $]a,b[$.
    (b) En déduire : $\exists c \in]a,b[\ / \ \ f'(c) = 0$.
    (c) Application : Montrer que le $n^{ième}$ polynôme de Hermite H_n (cf. exercice 15) possède n racines réelles distinctes.

33. * :
    (a) Étudier rapidement la fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x} \end{array} \right.$$

(b) Soit g la fonction réciproque de f sur $[e,+\infty[$ (g est donc définie sur $\left]0,\dfrac{1}{e}\right]$). Pour $x \in]1,e]$ on pose

$$h(x) = g(f(x))$$

Etudier h et tracer sa courbe. Calculer $h(2)$ et $h'(2)$.

(c) Déterminer et tracer l'ensemble $C = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \ / \ x^y = y^x\right\}$, et hachurer l'ensemble

$$A = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \ / \ x^y > y^x\right\}$$