DÉRIVÉES SUCCESSIVES

1. : Sachant que $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$, démontrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{l} x \neq 0 \mapsto \dfrac{\sin x}{x} \\ 0 \mapsto 1 \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. : Soit $f : x \mapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que $f(x) = o\left(x^2\right)$ lorsque x tend vers 0, mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

3. * : Sachant que $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right)$, montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$, non dérivable en 0, mais de classe C^1 sur $]0,+\infty[$; étudier f et tracer sa courbe.

4. * : Exemple de fonction non nulle dont toutes les dérivées sont nulles en un même point.
   (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n)$ quand $x \to 0$.
   (b) On pose $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
      i. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une fraction rationnelle F_n (quotient de 2 polynômes) telle que
      $$\forall x \neq 0 \quad f^{(n)}(x) = F_n(x)\, e^{-\frac{1}{x^2}}$$
      ii. Montrer que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0)$ existe et vaut 0.
   (c) Que peut-on en déduire sur la classe de f ?

5. :
   (a) α est un réel > 0 ; on pose $f(x) = x^\alpha$; montrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ ssi α est entier ou $\alpha > n$.
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$; montrer que f^2 et f^3 sont C^1 sur $[0,+\infty[$ mais pas f ; donner de même un exemple de fonction qui n'est pas C^2 sur $[0,+\infty[$ telle que f^2 et f^3 le soient.

6. * : On pose $f(x) = x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
   (a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 0$
   (b) Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$
   (c) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 2$
   (d) Généraliser.

7. : Newton à partir de Leibniz ; pour a, b dans $\mathbb{R}$ on pose $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = e^{bx}$ et $h = fg$; appliquer la formule de Leibniz à h et en déduire la formule du binôme.

8. : Soit $f : x \mapsto (x-a)^n (x-b)^n$ où a et b sont deux réels.
   (a) A l'aide de la formule de Leibniz, déterminer $f^{(n)}(x)$.
   (b) Calculer d'une autre façon $f^{(n)}(x)$ lorsque $a = b$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

9. * : On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$;
   (a) Montrer à l'aide de la formule de Leibniz que pour $0 \leqslant p \leqslant n$:
   $$(x-1)\, f^{(p+1)}(x) = (n+1)\, n \ldots (n-p+1)\, x^{n-p} - (p+1)\, f^{(p)}(x)$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k(k-1)\ldots(k-p+1) = \dfrac{(n+1)\, n \ldots (n-p+1)}{p+1}$.

10. * : On définit les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n(x) = x^n (1-x)^n$.

    (a) Calculer suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$, $f_n^{(p)}(0)$.

    (b) En déduire les valeurs de $f_n^{(p)}(1)$.

    (c) On pose alors $g_n : x \mapsto (1-x^2)^n$; calculer $g_n^{(p)}(-1)$ et $g_n^{(p)}(1)$ en montrant que $g_n(x) = cf_n(ax+b)$.

11. * : Les polynômes d'HERMITE.

    (a) On pose

    $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

    (b) Calculer $h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x)$.

    (c) Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer $h_n(x)$ connaissant $h_{n-1}(x)$ et en déduire que h_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients entiers. Soit H_n le polynôme formel associé à h_n (appelé $n^{ième}$ polynôme d'Hermite).

    (d) Montrer la relation de récurrence double: $H_n = 2XH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}$.

    (e) Montrer la relation différentielle : $H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0$.

    (f) ** Résoudre l'équation différentielle : $y" - 2xy' + 2ny = 0$

THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

12. :

    (a) Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I. Soit p le nombre de racines de f sur I, et p' le nombre de racines de f' sur I. Quelle inégalité déduite du théorème de Rolle relie p et p' ?

    (b) Soit f n-fois dérivable sur I admettant $n+1$ racines distinctes sur I.
    Que dire de $f^{(n)}$?

13. (application du 12 a))

    (a) Montrer que le polynôme dérivé d'un polynôme réel scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$; est-ce encore exact si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

    (b) Soit P un polynome réel, q et q' désignent la somme des ordres des racines réelles de P et de P' ; montrer que $q' \geqslant q - 1$.

    (c) En déduire que le polynôme dérivé d'un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$ est scindé sur $\mathbb{R}$; redémontrer par exemple que le polynôme de Legendre $D^n\left((X^2-1)^n\right)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

    (d) * Déduire de a) le fait qu'un polynôme réel scindé à racines simples ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

14. : Démontrer que $X^n + pX + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair, et plus de trois racines réelles si n est impair.

15. : Généralisations du théorème de Rolle.

    (a) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

    $$\left(\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = l \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \; / \quad f'(c) = 0$$

    Méthode 1 : montrer que f n'est pas injective.
    Méthode 2 : se ramener au théorème de Rolle usuel en utilisant $g(x) = f(\tan x)$.

    (b) Soit f dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b \in \mathbb{R}$; Montrer que

    $$\left(\lim_{a} f = \lim_{b} f = +\infty\right) \Rightarrow \exists c \in]a, b[\; / \quad f'(c) = 0$$

    Pour le cas général voir l'exercice 26.

16. : En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes ; dans chaque cas, on tracera les trois courbes correspondantes.

   (a) Si $x > -1$
   $$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \text{ (inégalités de Néper, à connaître)}$$
   (bien séparer les cas $x \leqslant 0$, et $x \geqslant 0$)

   (b) Si $0 \leqslant x < 1$ alors $x \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; quelle inégalité a-t-on pour $-1 < x \leqslant 0$? En déduire que pour $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \sin x \leqslant x$.

   (c) Si $x \geqslant 0$ alors $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$; quelle inégalité a-t-on pour $x \leqslant 0$?

17. : Montrer que si f est de classe C^1 en 0 avec $f'(0) = 1$, et (u_n) et (v_n) sont deux suites de limite nulle, alors
$$f(u_n) - f(v_n) \sim u_n - v_n$$
Appliquer à l'exercice 48 sur les suites.

18. : Redémontrer l'équivalence (cf. ex. 5. continuité, équation de Cauchy) :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$$
en supposant cette fois f dérivable sur $\mathbb{R}$.

19. : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; montrer les équivalences :

f est impaire $\Leftrightarrow f'$ est paire et $f(0) = 0$
f est paire $\Leftrightarrow f'$ est impaire
f est périodique $\Leftrightarrow f'$ est périodique et f est bornée

20. : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, +\infty[$; montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = l > 0$ alors $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, mais que la réciproque est fausse.

21. : * Démonstration de l'équivalence $f \nearrow \Longleftrightarrow f' \geqslant 0$ sans utiliser le théorème des accroissements finis.
Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et I un intervalle inclus dans D_f; on dit que f est croissante EN un point $x_0 \in D_f$ si au voisinage à gauche de x_0 $\quad f \leqslant f(x_0)$ et au voisinage à droite, $f \geqslant f(x_0)$; plus précisément, cela s'écrit :
$$\exists \alpha > 0 \quad / \quad \forall x \in D_f \begin{cases} x_0 - \alpha < x \leqslant x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) \\ x_0 \leqslant x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que si $[a,b] \subset D_f$, $\; a \leqslant b$ et f croissante en tout point de $[a,b]$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
   Indication : soit c la borne supérieure de $\{x \in [a,b] \;\; / \;\; f(x) \geqslant f(a)\}$; montrer que $f(c) \geqslant f(a)$ puis que $c = b$.

   (b) En déduire que f est croissante sur I ssi la restriction de f à I est croissante en tout point de I ; remarquer que ce théorème serait faux si on ne supposait pas I intervalle.

   (c) Démontrer que si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) > 0$, alors f est croissante en x_0.

   (d) Montrer que f est croissante sur I intervalle ssi $g : x \mapsto f(x) + ax$ est croissante sur I pour tout $a > 0$.

   (e) Montrer enfin que si f est dérivable sur I intervalle, alors f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I.

22. :

   (a) Soit f une fonction polynomiale de degré 2. Quel est en fonction de a et b le réel c tel que $(f(b) - f(a)) = (b-a) f'(c)$?

   (b) Donner une interprétation géométrique de ce résultat concernant la tangente à la parabole.

   (c) Dans un mouvement uniformément accéléré, à quel instant la vitesse instantanée est-elle égale à la vitesse moyenne entre t_1 et t_2 ?

(d) * Réciproque : déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telle pour tous a et b réels

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (1)$$

Indications : montrer f deux fois dérivable, dériver (1) par rappport à b puis a et ajouter.

23. : En remarquant que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ ne s'annule jamais, montrer que le théorème de Rolle (et donc également celui des accroissements finis) ne s'étend pas aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

24. : Le théorème des accroissements finis généralisé, et la (grande) règle de l'Hospital :

(a) Soient f et g continues sur $[a,b]$, $(a \neq b)$ et dérivables sur $]a,b[$. Pour $x \in [a,b]$, on pose

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(x) - f(a) & f(b) - f(a) \\ g(x) - g(a) & g(b) - g(a) \end{vmatrix}$$

Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\begin{vmatrix} f'(c) & f(b) - f(a) \\ g'(c) & g(b) - g(a) \end{vmatrix} = 0$. Remarque : on a donc $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ si ces expressions sont définies.

(b) Soient f et g dérivables sur $V = \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, g et g' jamais nulles sur $V \setminus \{x_0\}$ et telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

ce résultat est connu sous le nom de "grande règle de l'Hospital". Appliquer à $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\operatorname{th} x - \tan x}$.

(c) * Application 1 : Montrer, en appliquant $n-1$ fois la grande règle de L'Hospital, que si f est n fois dérivable au voisinage de 0, et si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n$, alors $f(x) = o(x^n)$ quand $x \to 0$. Remarque : ceci redémontre d'une autre façon le théorème de Taylor-Young.

(d) * Application 2 : (cf. intégration d'un DL) Montrer que si f et g sont dérivables au voisinage de x_0 et nulles en x_0 alors

$$f' = o(g') \text{ en } x_0 \Rightarrow f = o(g) \text{ en } x_0$$

25. : Formule de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction réelle de classe C^n sur $[a,b]$, $a < b$, et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$; on pose $\varphi(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \lambda \dfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, λ étant choisi de sorte que $\varphi(a) = 0$.

(a) Montrer en utilisant la fonction φ qu'il existe c de $]a,b[$ tel que $f(b) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \dfrac{f^{(k)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

(b) En déduire par exemple que $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ pour tout réel x.

MONOTONIE, INJECTIVITÉ ; FONCTIONS RÉCIPROQUES

26. : Annulation de la dérivée d'une fonction non monotone et th. de Rolle généralisé, théorème de Darboux.

Soit I un intervalle non réduit à un point.

(a) Soit f une fonction dérivable sur I, non monotone sur cet intervalle. Montrer que f n'est pas injective sur I et en déduire qu'il existe $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) En déduire le théorème de Rolle généralisé : si f dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ est telle que $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{b} f$, alors $\exists c \in \,]a,b[\;/\; f'(c) = 0$.

(c) * En déduire aussi que si f fonction dérivable sur un intervalle ouvert I a une dérivée prenant des valeurs < 0 et des valeurs > 0 sur I alors sa dérivée s'annule sur I.

(d) * En déduire le théorème de Darboux : "si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur I, c'est-à-dire que l'image de tout intervalle de I est un intervalle."

(e) * En déduire un exemple (autre que celui de l'exercice 22. de la série continuité globale) de fonction non continue qui vérifie cependant le théorème des valeurs intermédiaires.

(f) * Déduire aussi du théorème de Rolle généralisé que la foncion f_n définie par $f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ s'annule au moins n fois sur $\mathbb{R}$; on en déduit que le polynôme d'Hermite (exercice 11) possède n racines réelles distinctes.

27. * : Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $e^x = x^n$ possède exactement deux solutions $1 < a_n < b_n$ (figure pour $n = 3$) ; déterminer un équivalent de a_n et de b_n.

28. : Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $D_f = I, f(I) = J$, telle que pour toute suite (u_n) d'éléments de I, la convergence de la suite $(f(u_n))$ implique celle de la suite (u_n).

(a) Montrer par l'absurde que f est injective, puis que f^{-1} est continue sur J.

(b) En déduire que si J est un intervalle, f est une bijection continue de I sur J.

29. * : On se pose la question de savoir si $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$.

(a) Un exemple ; on pose $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$. Exprimer y en fonction de x ; calculer $\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$ en fonction de x et comparer avec $\dfrac{dy}{dx}$; calculer $\dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$ en fonction de x et comparer avec $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(b) On donne $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ avec f et g C^2, f bijective , $h = g \circ f^{-1}$; exprimer à l'aide de f et g et en fonction de t, $\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$ et $\dfrac{dy}{dx} = h'(x)$, puis $\dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2} = h''(x)$.

30. * :

(a) Étudier rapidement la fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x} \end{array} \right.$$

(b) Soit g la fonction réciproque de f sur $[e, +\infty[$ (g est donc définie sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$). Pour $x \in]1, e]$ on pose

$$h(x) = g(f(x))$$

Etudier h et tracer sa courbe. Calculer $h(2)$ et $h'(2)$.

(c) Déterminer et tracer l'ensemble $C = \left\{(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \ / \ x^y = y^x\right\}$, et hachurer l'ensemble

$$A = \left\{(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \ / \ x^y > y^x\right\}$$

(d) Comparer e^π et π^e.

FORMULE DE TAYLOR – YOUNG – DÉVELOPPEMENTS LIMITES

31. Soit f une fonction deux fois dérivable en x_0.

    (a) Montrer que
    $$\frac{f(x_0+u)-f(x_0-u)}{2u}=f'(x_0)+\underset{u\to0}{o}(u)$$

    (b) Donner un exemple de f continue en x_0 telle que $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0-u)}{2u}=l\in\mathbb{R}$ et pourtant f n'est pas dérivable en x_0.

32. Soit f une fonction trois fois dérivable en x_0.

    (a) Montrer que
    $$\frac{f(x_0+u)-2f(x_0)+f(x_0-u)}{u^2}=f''(x_0)+\underset{u\to0}{o}(u)$$

    (b) Donner un exemple de f dérivable en x_0 telle que $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(x_0+u)-2f(x_0)+f(x_0-u)}{u^2}=l\in\mathbb{R}$ et pourtant f n'est pas deux fois dérivable en x_0.

    (c) * Généraliser le a) à l'ordre n.

33. : Intégration et dérivation d'un développement limité.
    On considère une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable au voisinage de x_0

    (a) Montrer, en utilisant la grande règle de L'Hospital (exercice 24) que si f' possède un développement limité polynomial à l'ordre n en x_0 alors f possède un développement à l'ordre $n+1$ en x_0, obtenu en intégrant terme à terme celui de f'.

    (b) Montrer que la réciproque est fausse ($f(x)=x^{n+1}\sin\dfrac{1}{x}$; on a par contre vu en cours que cette réciproque est vraie si f est supposée $n+1$ fois dérivable en x_0).

34. : Déterminer sans passer par la formule de Taylor, mais en utilisant les développements connus, les développements limités en x_0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

    (a) $x\mapsto e^x$
    (b) $x\mapsto\cos x$
    (c) $x\mapsto\sin x$
    (d) $x\mapsto x^\alpha$
    (e) $x\mapsto\ln x$
    (f) $x\mapsto\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ (ici $x_0=0$).

35. : Déterminer le développement limité polynomial de f en x_0 à l'ordre n.

    (a) $x_0=0\,;n=3;f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$
    Rep :$\frac13+\frac49x+\frac{13}{27}x^2+\frac{40}{81}x^3+o\left(x^3\right)$

    (b) $x_0=1$; $n=6$; $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
    Rep :$u-\frac32u^2+\frac{11}{6}u^3-\frac{25}{12}u^4+\frac{137}{60}u^5-\frac{49}{20}u^6+o\left(u^6\right)$

    (c) $x_0=0$; $n=7$; $f(x)=e^{\sin x}$
    Rep : $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{15}-\frac{x^6}{240}+\frac{x^7}{90}+o\left(x^7\right)$

    (d) $x_0=0$; $n=7$; $f(x)=\operatorname{ch}(2x)\operatorname{sh}(3x)$
    Rep : $3x+\frac{21}{2}x^3+\frac{521}{40}x^5+\frac{13021}{1680}x^7+o\left(x^7\right)$

    (e) $x_0=0$; $n=3$; $f(x)=(1+x)^{\frac1x}$
    Rep : $e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o\left(x^3\right)$

    (f) $x_0=0$; $n=6$; $f(x)=\ln\cos x$
    Rep :$-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o\left(x^6\right)$

(g) $x_0 = \frac{\pi}{2}; n = 4; f(x) = \cos x - x \sin x$
Rep :$-\frac{1}{2}\pi - 2u + \frac{\pi}{4}u^2 + \frac{2}{3}u^3 - \frac{\pi}{48}u^4 + o\left(u^4\right)$

(h) $x_0 = 0\,; n = 4; f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$
Rep : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{64}x^4 + o\left(x^4\right)$

(i) $x_0 = 1; n = 4; f(x) = \arctan x$ (procéder par intégration)
Rep : $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{4} + \dfrac{u^3}{12} + o\left(u^4\right)$

(j) $x_0 = 1\,; n = 4; f(x) = (2-x)^{\tan(\pi x)}$
Rep= $1 + (-\pi)\,u^2 - \frac{\pi}{2}u^3 + \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right)u^4 + o\left(u^4\right)$

(k) $x_0 = 0\,; n = 5; f(x) = (1 + \arcsin(x))^{\sin(x)}$
Rep : $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 - \frac{5}{6}x^5 + o\left(x^5\right)$

(l) $x_0 = 0\,; n = 6; f(x) = (\cos x)^{\sin x}$
Rep : $1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^6 + o\left(x^6\right)$

(m) $x_0 = 0\,; n = 6; f(x) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
Rep : $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + o\left(x^6\right)$

(n) $x_0 = \frac{\pi}{6}; n = 2\ ;\ f(x) = \left(\tan\dfrac{3x}{2}\right)^{\tan 3x}$;
Rep : $\frac{1}{e}\left(1 + \frac{3}{2}u^2 + o\left(u^2\right)\right)$

36. Déterminer les deux premiers termes non nuls du développement polynomial de f en 0 :

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$
(b) $f(x) = (1+x)^x - (1+\sin x)^{\sin x}$
(c) $f(x) = \ln(1+\sin x) - \sin(\ln(1+x))$
(d) $f(x) = e^{\sin x} - e^{\arcsin x}$

Rep : (a) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{12}$,(b) $\dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^5}{4}$.

37. Soit$\left\{\begin{array}{l} f(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \cdots + o\left(x^n\right) \\ g(x) = x + a'x^3 + b'x^5 + c'x^7 + \cdots + o\left(x^n\right)\end{array}\right.$ (quand $x \to 0$)

(a) Déterminer la partie principale du développement polynomial en 0 de
$$f\left(g\left(x\right)\right) - g\left(f\left(x\right)\right)$$

(b) Application à $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$.

38. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement polynomial de f en 0 à l'ordre n de :

(a) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (on fera apparaître la série harmonique).
(b) $e^x \sin x$ (utiliser les complexes).

39. :

(a) Déterminer le DLP$_3$ de $\dfrac{1}{1+x-2x^2}$ en 0.
(b) Écrire $\dfrac{1}{1+x-2x^2}$ sous la forme $\dfrac{a}{1+\alpha x} + \dfrac{b}{1+\beta x}$pour obtenir son DLP à l'ordre n en 0.

40. : Complément à l'exercice 24 sur les limites, traitant de la portée d'un promontoire.

(a) Montrer que $L' = \sqrt{2Rh}\left(1+\dfrac{u}{4}+o\left(u\right)\right)$ quand $u=\dfrac{h}{R}\to 0$, puis que $L=\sqrt{2Rh}\left(1-\frac{5}{12}u+o\left(u\right)\right)$ quand $u\to 0$.

41. :

(a) On se propose de déterminer le DLP$_n$ en 0 de $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ de 3 manières différentes.

i. Méthode des coefficients indéterminés ; on pose $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n)$, $\left(1-x-x^2\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n)\right)=1$; en déduire une relation de récurrence d'où l'exprssion de a_k à l'aide de la suite de Fibonacci (F_n) $(F_0=0, F_1=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n)$.

ii. Retrouver le DLP$_n$ de $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ en utilisant la méthode du 42. (b) ; en déduire une expression de F_n.

iii. Retrouver encore le DLP$_n$ de $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ en utilisant la méthode $\dfrac{1}{1-u}$ et en déduire une relation entre les coefficients binomiaux et la suite de Fibonacci.

(b) Déterminer le DLP$_n$ de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ en 0.

42. : Déterminer le développement généralisé au voisinage de 0 suivant la famille $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ de :

(a) $\dfrac{\sin x}{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$ à la précision x^3 $\left(=\dfrac{1}{x}+\frac{2}{3}x-\frac{53}{360}x^3+o\left(x^3\right)\right)$

(b) $\dfrac{1}{1-\cos x}$ à la précision x^3 $\left(=\dfrac{2}{x^2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{120}x^2+o\left(x^3\right)\right)$

43. : Déterminer le développement généralisé au voisinage de $+\infty$ suivant la famille $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ de :

(a) $\dfrac{1}{1+x}$ précision $\dfrac{1}{x^n}$

(b) $\sqrt{1+x+x^2}$ précision $\dfrac{1}{x^2}$

(c) $\sin\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)$ précision $\dfrac{1}{x^3}$ $\left(=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{6x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$

44. Déterminer le développement asymptotique quand $x\to+\infty$ suivant la famille $\left(x^\alpha\ln x^\beta\right)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ de :

(a) $\ln\left(x+1\right)$ à la précision $\dfrac{1}{x^n}$

(b) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ à la précision $\dfrac{1}{x^n}$

45. : Déterminer un développement asymptotique quand $x\to+\infty$ suivant la famille $\left(e^{-kx}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de :

(a) $\ln\left(1+e^x\right)$ à la précision e^{-nx}.

(b) th x à la précision e^{-nx}.

46. Déterminer la partie principale quand $x\overset{>}{\to}0$ de $x^x-\left(\sin x\right)^{\sin x}$.

Rep : $\dfrac{x^3\ln x}{6}$.

47. * : Reprenant les notations de l'exercice 33, on souhaite calculer $h_d'\left(e\right)$.

(a) Démontrer que $\dfrac{\ln\left(e+u\right)}{e+u}=\dfrac{1}{e}-\dfrac{u^2}{2e^3}+o\left(u^2\right)$ quand $u\to 0$.

(b) En utilisant $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln\left(h\left(x\right)\right)}{h\left(x\right)}$ et la première question, démontrer que

$$\left(h\left(x\right)-e\right)^2\underset{x\to e}{\sim}\left(x-e\right)^2$$

et en déduire que $h_d'\left(e\right)=-1$.

48. :

(a) Démontrer en utilisant simplement le développement limité de la fonction réciproque que :

i. $\arccos(1-u) \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{2u}$

ii. $\operatorname{argch}(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{2u}$

iii. $\operatorname{argth}(1-u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}|\ln u|$ alors que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right) \underset{u\to 0}{\sim} ?$

iv. $\operatorname{argcoth}(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}|\ln u|$

(b) Démontrer plus généralement, en utilisant $\arccos(1-u) = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{2u}}{2}$ que $\arccos(1-u)$ possède un développement limité généralisé à l'ordre n du type :

$$a_0\sqrt{u} + a_1\sqrt{u^3} + \cdots + a_n\sqrt{u^{2n+1}} + o\left(\sqrt{u^{2n+1}}\right) \text{ quand } u \to 0$$

et calculer les a_i.

(c) Déterminer de même des développements limités de :

- $\operatorname{argch}(1+u)$
- $\operatorname{argth}(1-u)$
- $\operatorname{argcoth}(1+u)$

49. * : Soit $g : x \mapsto x + \ln x$

(a) Montrer que g possède une fonction réciproque f, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. Tracer les courbes de f et g.

(b) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

(c) Montrer que la fonction $f_1 : x \mapsto x - \ln x$ est asymptote à f en $+\infty$.

(d) Montrer plus précisément que :

$$f(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right) \text{ quand } x \to +\infty$$

et en déduire un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de f.

50. * : Soit $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(a) Prolonger f par continuité en 0.

(b) Montrer que f possède des développements polynomiaux à tous ordres en 0 et déterminer celui d'ordre 2.

(c) Démontrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$.

(d) Donner un développement limité à trois termes de $(n+1)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

51. * : Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $m(t) = \left(\dfrac{a^t+b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$. (En particulier, $m(1)$ est la moyenne *arithmétique*, et $m(-1)$ est la moyenne *harmonique* de a et b).

(a) Que vaut $m(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} m(t)$? Que vaut $m(-\infty) = \lim\limits_{t\to-\infty} m(t)$?

(b) Montrer que $m(0) = \lim\limits_{x\to 0} m(t) = \sqrt{ab}$: c'est la moyenne géométrique de a et b.

(c) Déterminer un développement limité à l'ordre 1 de $m(t)$ quand $t \to 0$.

(rep : $m(t) = \sqrt{ab}\left(1 + \dfrac{\ln^2 \frac{a}{b}}{8}t + o(t)\right)$)

En déduire $m'(0)$.

(d) ** En utilisant une inégalité de convexité, démontrer que

$$t > 1 \Rightarrow m(t) > m(1).$$

(e) ** En déduire que si $0 < u < v$ alors $\dfrac{a^u + b^u}{2} < \left(\dfrac{a^v + b^v}{2}\right)^{\frac{u}{v}}$; puis que m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(f) ** Montrer que m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(g) ** Tracer $\mathcal{C}_m$ pour $a = 1, b = 4$.

ÉTUDES DE FONCTIONS

52. : Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

(a) $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$

(b) $f : x \mapsto \sin \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{3x}{2}$

(c) $f : x \mapsto [2x] - x$

(d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - [x]}$

(e) $f : x \mapsto \tan \dfrac{x}{2} + \sin x$

53. : Etudier f au voisinage de x_0, tracer $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ (on étudiera la possibilité de prolonger f par continuité, la dérivabilité, la position de la courbe par rapport à la tangente...)

(a) $f(x) = x^\alpha \ln x$ $(x_0 = 0)$

(b) $f(x) = x^{x^\alpha}$ $(x_0 = 0)$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ $(x_0 = 0)$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ $(x_0 = 0)$

(e) $f(x) = \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|^x$ $(x_0 = 0\ ;\ x_0 = -1)$

(f) $f(x) = (1 + \sin x)^{\cot x}$ $\left(x_0 = 0\ ;\ x_0 = \pi\ ;\ x_0 = \dfrac{3\pi}{2}\right)$

(g) $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$ $(x_0 = 0)$

54. * : Démontrer à l'aide d'un développement limité que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ et tracer la courbe au voisinage de ce point :

(a) $f(x) = \sin^2 x - 2\cos x$ et $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

(b) $f(x) = x^2(3 - 2\ln x)$ et $x_0 = 1$

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ et $x_0 = \dfrac{1}{2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$ et $x_0 = 0$ (ENAC 2000).

55. Etudier les branches infinies des courbes des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$.

$f(x) =$	direction asymptotique ? Si oui, de pente ....?	asymptote ? Si oui, d'équation....? Position de la courbe?	Parabole asymptote ?	Allure
1				
$x-1$				
x^2				
$\sqrt{x}$				
$\sqrt{x}-x$				
$\dfrac{e^x}{x}$				
$x+\dfrac{1}{x}$				
$x^2+\dfrac{1}{x}$				
$\sqrt{x^2+x}$				
$\sqrt{x^4+x^2}$				
$\sin x$				
$x+\sin x$				
$x\sin x$				
$x\sin\dfrac{1}{x}$				
$x^2\sin\dfrac{1}{x}$				
$x^3\sin\dfrac{1}{x}$				

56. : Déterminer un développement limité en + l'infini jusqu'au premier terme de limite nulle puis répondre aux questions suivantes : Direction asymptotique ? Asymptote ? Branche parabolique ? Courbe asymptote ? Position de la courbe par rapport à l'asymptote ? Allure de la courbe au voisinage de + l'infini ?

(a) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$

(b) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

(c) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$

(d) $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

(e) $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4}$

(f) $f : x \mapsto \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$

(g) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}\arctan x$

57. * Conditions d'existence d'un axe ou d'un centre de symetrie

Soit f une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, C_f la courbe associée.

(a) Montrer que si C_f possède pour axe de symétrie la droite $x = x_0$ alors $f^{(2k+1)}(x_0) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$.

(b) Montrer que si f est polynomiale, alors la réciproque est vraie.

(c) Montrer que si C_f possède pour centre de symétrie un point d'abscisse x_0 alors $f^{(2k)}(x_0) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

(d) Montrer que si f est polynomiale, alors la réciproque est vraie.

(e) Applications : $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$; $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2$.

58. : Relations entre la limite de la dérivée et l'existence d'une direction asymptotique.

Soit f une fonction dérivable sur $[A, +\infty[$.

(a) Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$, alors C_f possède une direction asymptotique horizontale en $+\infty$.

Indication : soit $\varepsilon > 0$; montrer grâce au TAF qu'il existe $B > 0$ tel que si $x > B$, alors $\left|\dfrac{f(x) - f(B)}{x - B}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ puis en déduire qu'il existe $C > B$ tel que si $x > C$ $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$.

REM : cette propriété est la version fonctionnelle du *lemme de l'escalier* pour les suites : si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors $\lim \dfrac{u_n}{n} = 0$.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

(c) Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = a \in \mathbb{R}$, alors C_f possède une direction asymptotique de pente a en $+\infty$.

59. * : Suite de 58).

Soit f une fonction dérivable sur $[A, +\infty[$.

(a) Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = +\infty$, alors C_f possède une direction asymptotique verticale en $+\infty$.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

(c) Montrer que si f est convexe ou concave sur $[A, +\infty[$, alors C_f possède toujours une direction asymptotique en $+\infty$.

60. * : Étudier la fonction $f : x \mapsto \left(x^2\right)^x$ (E3A 2000).

61. * : Étudier et tracer dans trois repères distincts mais ayant un axe des ordonnées commun (unité : 5 cm) les fonctions f, g, h :

$f : x \mapsto \ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| = \ln|x+1| - \ln|x|$

$g : x \mapsto x f(x)$

$h : x \mapsto x^2 f(x)$

(a) on trouvera un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$;

(b) on montrera que g et h sont prolongeables par continuité en 0, et on étudiera la dérivabilité en 0 de ces prolongements.

(c) on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près du réel α, où g atteint son minimum, ainsi que de $g(\alpha)$.

(d) on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près du réel β, où h atteint son maximum, ainsi que de $h(\beta)$.

(e) on étudiera les branches infinies de la courbe de h en particulier.

62. * :

   (a) Étudier la fonction $f : x \mapsto \left|1+\dfrac{1}{x}\right|^{x}$ (on étudiera avec soin la fonction au voisinage de 0)

   (b) Étudier la fonction $g : x \mapsto \left|1-\dfrac{1}{x}\right|^{x}$

   - Trouver une relation entre f et g permettant d'utiliser les résultats du a.
   - Montrer que $g(1+u) \sim |u|$ quand $u \to 0$ et en déduire l'étude de g au voisinage de 1.

63. * : On définit la famille de fonctions f_λ par : $f_\lambda : x \mapsto x^{\left(x^\lambda\right)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Étudier f_λ au voisinage de 0.

   (b) Étudier la position relative des diverses courbes.

   (c) Déterminer le lieu des points à tangente horizontale quand λ varie (étudier la courbe ainsi décrite).

   (d) Faire une figure avec une courbe représentative de chaque cas particulier et le lieu précédent.

   (e) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} f_\lambda\left(1-\frac{1}{|\lambda|}\right)$ et $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} f_\lambda\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|}\right)$.

64. * :

   (a) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} e^{x \cot x}$.

   (b) Etudier l'existstence et le nombre de solutions de l'équation $e^{\lambda z} = z$, λ étant un réel fixé.

65. * : Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $1 + x + x^2 + ... + x^{2n}$ reste toujours $\geqslant \lambda$ (pour tout x réel et n entier naturel).