DÉTERMINANTS

1. : Décomposer σ en cycles disjoints ; calculer σ^{2017}. Déterminer la signature de σ.

   (a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $\sigma = \langle 1,2,3\rangle \circ \langle 2,3,4\rangle$.

2. Racine carrée d'une permutation.

   (a) Déterminer σ telle que $\sigma^2 = \langle 1,2,3\rangle$, et plus généralement, $\sigma^2 = \langle 1,2,3,..,2p+1\rangle$.

   (b) Déterminer σ telle que $\sigma^2 = \langle 1,2\rangle \circ \langle 3,4\rangle$, et plus généralement, $\sigma^2 = \langle 1,2,..,2p\rangle \circ \langle 2p+1,..,4p\rangle$.

   (c) Déterminer σ telle que $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & 13 & 15 & 12 & 14 & 16 & 1 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

   (d) * $\sigma_0 \in S_n$ étant donnée, à quelle CNS existe-t-il $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma^2 = \sigma_0$?

3. * : Nombre de transpositions intervenant dans une permutation.
   Etant donnée une permutation σ de S_n, on note $o(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ (y compris les orbites à un élément).
   Démontrer que le nombre de transpositions intervenant dans une décomposition de σ est toujours supérieur ou égal à $n - o(\sigma)$ et qu'il en existe une comportant exactement $n - o(\sigma)$ transpositions.

4. : Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$ est symétrique en a, b et c sans le développer.

5. :

   (a) Montrer que
   $$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{c-a}{2}$$

   (b) En déduire que si A, B, C sont les mesures prises dans $]0,\pi[$ des angles non orientés d'un triangle,
   $$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$$

   (cf ex 4 des fonctions usuelles)

6. : Montrer que :
   $$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = (\cos c - \cos(a+b))(\cos(a-b) - \cos c) = 4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)$$
   avec $p = \frac{a+b+c}{2}$.

7. : On se donne trois fonctions C_1, C_2, C_3 de $\mathbb{R}$ vers $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose alors : $f(x) = \det([C_1(x), C_2(x), C_3(x)])$ pour tout réel x.

   (a) Justifier la dérivabilité de f, et exprimer $f'(x)$ comme somme de 3 déterminants.

   (b) Montrer que : $\begin{vmatrix} a & \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) \\ b & \sin(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) \\ c & \sin(\theta+\gamma) & \cos(\theta+\gamma) \end{vmatrix}$ ne dépend pas de θ. Le calculer.

8. :

(a) Calculer $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}$ de deux façons différentes. Pourquoi la formule obtenue (identité de Diophante) est-elle la même que celle qu'on obtient en écrivant $|zz'|^2 = |z|^2 |z'|^2$? (cf. ex. 11 sur les matrices).

(b) Montrer plus généralement par une méthode similaire l'identité d'Euler pour $u, v, u', v' \in \mathbb{C}$: $\left(|u|^2 + |v|^2\right)\left(|u'|^2 + |v'|^2\right) = |uu' - vv'|^2 + \left|u\overline{v'} + v\overline{u'}\right|^2$ (cf exercice 4c) sur les complexes).

9. : Démontrer que dans un espace vectoriel *réel* de dimension 3, il n'existe pas d'endomorphisme f vérifiant $f^2 = -\operatorname{id}$. Donner par contre un tel exemple d'endomorphisme dans le plan.

10. : Montrer qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair a un déterminant nul. Trouver par exemple la relation liant les colonnes d'une matrice antisymétrique d'ordre 3 générale.

11. :

(a) Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$ en utlisant la propriété du déterminant d'un produit de matrices ; en déduire la factorisation du déterminant circulant droit : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

(b) Développer, et en déduire une belle formule (cf. ex. 5 sur les complexes).

(c) Factoriser le déterminant circulant gauche : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

12. : On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calculer A^n à l'aide de la suite de Fibonacci.

(b) En déduire que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

(c) Calculer A^2 en fonction de A et I_n; élever à la puissance n et en déduire que $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.

13. :

(a) Montrer que, dans un plan affine, $M(x, y)$, $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$ sont alignés ssi $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$

(b) En déduire que dans le plan complexe, $M(z)$, $M'(z')$, $M''(z'')$ sont alignés ssi $\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z' & \overline{z'} & 1 \\ z'' & \overline{z''} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(c) On donne dans un plan affine orienté rapporté à un repère orthonormé direct $M(x, y)$, $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$; que signifie pour le triangle $MM'M$" la condition $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} > 0$?

(d) * Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I ; que signifie pour f la propriété

$$\forall x \leqslant x' \leqslant x\text{"} \in I \qquad \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ x' & f(x') & 1 \\ x'' & f(x'') & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0 \text{ ?}$$

14. : Théorème des accroissements finis super-généralisé :
Soient f, g, h trois fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

(a) En considérant $\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix}$ montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$

(b) Montrer que cet énoncé contient celui du théorème des accroissements finis généralisés (il existe $c \in]a, b[$ tel que $\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$).

(c) Retrouver aussi le théorème des accroissements finis usuel.

(d) Donner l'interprétation cinématique de ce théorème pour un mouvement :

$$t \mapsto M(t) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

15. * :

(a) Montrer à l'aide de manipulations élémentaires, que $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ c^2 & (b+c)^2 & b^2 \\ c^2 & a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$ est égal à $\dfrac{(a+b+c)^3}{2} \begin{vmatrix} a+b & a & b \\ c & b+c & b \\ c & a & c+a \end{vmatrix}$; terminer le calcul.

(b) Montrer que si $abc \neq 0$, $D'(a, b, c) = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & (b+c)^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$ est égal à $(abc)^4 D(1/a, 1/b, 1/c)$; en déduire sa factorisation.

(c) En déduire les factorisations de $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ (Déterminant de Cayley-Menger) et de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (bc)^2 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & (ac)^2 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & (ab)^2 \end{vmatrix}$.

16. Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & r & -q \\ -b & -r & 0 & p \\ -c & q & -p & 0 \end{vmatrix} = (ap + bq + cr)^2$$

Indication : si $r \neq 0, \Delta \dfrac{1}{r} \begin{vmatrix} 0 & a & b & ap+bq+cr \\ -a & 0 & r & 0 \\ -b & -r & 0 & 0 \\ -c & q & -p & 0 \end{vmatrix}$.

17. : Matrices quaternioniques. Soit $A = \begin{bmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & t & -z \\ z & -t & x & y \\ t & z & -y & x \end{bmatrix}$.

(a) Remarquer que ${}^tC_i.C_j = \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right) \delta_{ij}$; en déduire que $\det(A) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right)^2$; calculer A^{-1} si $(x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)$.

(b) Montrer que l'ensemble des matrices du type de A est stable par produits. En déduire que le produit de 2 sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés.

(c) Expliquer l'analogie avec l'exercice 8 b).

18. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ 2 & 3 & .. & n+1 \\ .. & & & \\ n & n+1 & .. & ?? \end{vmatrix}$, et $D_{n,k} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & .. & \binom{n}{k} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & .. & .. \\ .. & & & \\ \binom{n+k}{0} & .. & .. & \binom{n+k}{k} \end{vmatrix}$, pour $k, n \geqslant 0$.

19. :

   (a) Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & .. & .. & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & a_2 & .. & a_2 \\ .. & & & & .. \\ a_{n-1} & .. & a_{n-1} & 1+a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & .. & & a_n & 1+a_n \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+..+a_n$ par une succession de combinaison de lignes ou de colonnes.

   (b) En déduire que pour tout $x_1, x_2, .., x_n \in \mathbb{K}^*$:
   $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & .. & .. & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & .. & 1 \\ .. & & & & .. \\ 1 & .. & 1 & 1+x_{n-1} & 1 \\ 1 & .. & & 1 & 1+x_n \end{vmatrix} = x_1 x_2 ... x_n \left(1 + \frac{1}{x_1} + .. + \frac{1}{x_n}\right)$.

20. Déterminant de Van der Monde.

   (a) Factoriser $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$.

   (b) On pose $V_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & .. & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & .. & x_2^{n-1} \\ .. & & & & .. \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$; en commençant par la droite, retrancher à chaque colonne la précé dente multipliée par x_n, et montrer que $V_n(x_1, .., x_n) = (x_n - x_1)(x_n - x_2) .. (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}(x_1, .., x_{n-1})$; en déduire $V_n(x_1, .., x_n)$ (à retenir).

21. Quelques applications des déterminants de van der Monde.

   (a) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & .. & 2^{n-1} \\ .. & & & & .. \\ 1 & n & n^2 & ... & n^{n-1} \end{vmatrix}$.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique polynôme de dégré inférieur ou égal à $n-1$ prenant des valeurs données en n points donnés (distincts).

   (c) Démontrer que si les α_i sont des complexes distincts, la famille $(x \mapsto e^{\alpha_1 x}, x \mapsto e^{\alpha_2 x}, .., x \mapsto e^{\alpha_n x})$ est $\mathbb{C}$-libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.

22. * : Déterminants circulants (généralisation de 11).

   (a) On pose $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & .. & a_n \\ a_n & a_1 & .. & a_{n-1} \\ .. & & & .. \\ a_2 & .. & a_n & a_1 \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & u_1 & & u_{n-1} \\ 1 & u_1^2 & & \\ .. & .. & & .. \\ 1 & u_1^{n-1} & .. & u_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$ où $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = u^k$ $\left(u = e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)$.

   Montrer que $AU = U.\mathrm{diag}\big(f(1), f(u), .., f(u^{n-1})\big)$, où $f(z) = a_1 + z a_2 + .. + z^{n-1} a_n$.

   (b) En déduire que $\det(A) = \prod_{j=0}^{n-1} f(u_j)$.

(c) Factoriser aussi : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & .. & a_n \\ a_2 & a_3 & .. & a_1 \\ .. & & & .. \\ a_n & a_1 & .. & a_{n-1} \end{vmatrix}$.

23. * : Déterminant cyclotomique.

(a) Soit α une racine n-ième de 1 ; montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = n\delta_{1\alpha}$.

(b) Soit $U_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & u_1 & & u_{n-1} \\ 1 & u_1^2 & & \\ .. & .. & & .. \\ 1 & u_1^{n-1} & .. & u_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$ où $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = u^k$ $(u = e^{\frac{2i\pi}{n}})$ (même matrice que dans 24) et $\det U_n = D_n$; calculer $D_1, D_2, ..D_4$.

(c) En faisant bien attention de ne pas confondre le i complexe, et le i entier, on peut remarquer que $U_n(i,j) = u^{ij}$.Montrer que $U_n\overline{U_n} = nI_n$. En déduire que U_n est inversible et exprimer son inverse.

(d) Montrer que $|D_n| = n^{n/2}$. On se propose de calculer maintenant exactement D_n.

(e) Posons $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$ (α est donc une racine carrée de u). En remarquant que D_n est un déterminant de Van der Monde, montrer que

$$D_n = \prod_{0\leqslant k<l\leqslant n-1} \alpha^{k+l} \prod_{0\leqslant k<l\leqslant n-1} i \underbrace{\prod_{0\leqslant k<l\leqslant n-1} 2\sin\left(\frac{l-k}{n}\pi\right)}_{R}$$

(f) Montrer que $R = |D_n|$

(g) Montrer que $\displaystyle\sum_{0\leqslant k<l\leqslant n-1} k + l = \frac{n(n-1)^2}{2}$.

(h) En déduire que $D_n = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} n^{n/2}$.Vérifier les calculs du b).

24. :

(a) Construire une matrice d'ordre 4 à coefficients entiers non nuls dont le déterminant vaut 1 ; déterminer son inverse.

(b) * : Démontrer qu'une matrice inversible à coefficients entiers a une inverse à coefficients entiers ssi son déterminant est égal à ± 1. Appliquer ceci à la résolution du sujet d'étude 13. b) du premier trimestre.

25. *: Déterminant, résultant, et discriminant.

(a) Soient P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes de degrés respectifs n et $m \geqslant 1$. Montrer qu'ils ont une racine commune ss'il existe deux polynômes P_1 et Q_1 de degrés respectifs $n-1$ et $m-1$ (exactement) tels que $PQ_1 = QP_1$.

(b) En déduire que P et Q ont une racine commune ssi la famille $\left(P, XP, ...X^{m-1}P, Q, XQ, ..., X^{n-1}Q\right)$ est liée.

(c) En déduire que P et Q ont une racine commune ssi un certain déterminant d'ordre $n+m$ est nul (appelé résultant des deux polynômes).

(d) En déduire que $P = aX^2 + bX + c$ $(a \neq 0)$ a une racine multiple ssi $\begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = 0$; que retrouve-t-on et pourquoi ?

(e) Ecrire (et développer) la condition portant sur a, b, c, d pour que $X^2 + aX + b$ et $X^2 + cX + d$ aient une racine commune.

(f) Ecrire la condition pour que $X^3 + pX + q$ ait une racine multiple.