

## DÉTERMINANTS

1. : Décomposer  $\sigma$  en cycles disjoints ; calculer  $\sigma^{2009}$ . Déterminer la signature de  $\sigma$ .

$$(a) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \sigma = \langle 1, 2, 3 \rangle \circ \langle 2, 3, 4 \rangle.$$

2. Racine carrée d'une permutation.

(a) Déterminer  $\sigma$  telle que  $\sigma^2 = \langle 1, 2, 3 \rangle$ , et plus généralement,  $\sigma^2 = \langle 1, 2, 3, \dots, 2p+1 \rangle$ .

(b) Déterminer  $\sigma$  telle que  $\sigma^2 = \langle 1, 2 \rangle \circ \langle 3, 4 \rangle$ , et plus généralement,  $\sigma^2 = \langle 1, 2, \dots, 2p \rangle \circ \langle 2p+1, \dots, 4p \rangle$ .

(c) Déterminer  $\sigma$  telle que  $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 & 11 & 13 & 15 & 12 & 14 & 16 & 1 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(d) \*  $\sigma_0 \in S(E)$  étant donnée, à quelle CNS existe-t-il  $\sigma \in S(E)$  tel que  $\sigma^2 = \sigma_0$  ?

3. \* : Nombre de transpositions intervenant dans une permutation.

Etant donnée une permutation  $\sigma$  de  $S_n$ , on note  $o(\sigma)$  le nombre d'orbites de  $\sigma$  (y compris les orbites à un élément).

Démontrer que le nombre de transpositions intervenant dans une décomposition de  $\sigma$  est toujours supérieur ou égal à  $n - o(\sigma)$ .

4. : Montrer que  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$  est symétrique en  $a, b$  et  $c$  sans le développer.

5. :

(a) Montrer que

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{c-a}{2}$$

(b) En déduire que si  $A, B, C$  sont les mesures prises dans  $]0, \pi[$  des angles non orientés d'un triangle,

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

(cf ex 4 des fonctions usuelles)

6. : Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = (\cos c - \cos(a+b))(\cos(a-b) - \cos c) = 4 \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)$$

avec  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

7. : On se donne trois fonctions  $C_1, C_2, C_3$  de  $\mathbb{R}$  vers  $M_{3,1}(\mathbb{R})$  dérivables sur  $\mathbb{R}$ . On pose alors :  $f(x) = \det([C_1(x), C_2(x), C_3(x)])$  pour tout réel  $x$ .

(a) Justifier la dérivabilité de  $f$ , et exprimer  $f'(x)$  comme somme de 3 déterminants.

(b) Montrer que :  $\begin{vmatrix} a & \sin(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) \\ b & \sin(\theta + \beta) & \cos(\theta + \beta) \\ c & \sin(\theta + \gamma) & \cos(\theta + \gamma) \end{vmatrix}$  ne dépend pas de  $\theta$ . Le calculer.

8. :

(a) Calculer  $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}$  de deux façons différentes. Pourquoi la formule obtenue (identité de Diophante) est-elle la même que celle qu'on obtient en écrivant  $|zz'|^2 = |z|^2 |z'|^2$  ? (cf. ex. 11 sur les matrices).

(b) Montrer plus généralement par une méthode similaire l'identité d'Euler pour  $u, v, u', v' \in \mathbb{C}$  :  $(|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2) = |uu' - vv'|^2 + |u\bar{v}' + v\bar{u}'|^2$  (cf exercice 4c) sur les complexes).

9. : Démontrer que dans un espace vectoriel *réel* de dimension 3, il n'existe pas d'endomorphisme  $f$  vérifiant  $f^2 = -\text{id}$ . Donner par contre un tel exemple d'endomorphisme dans le plan.

10. :

(a) Calculer puis factoriser  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$  ; en déduire la factorisation du déterminant circulant droit :  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ , ainsi qu'une belle formule (cf. ex. 5 sur les complexes).

(b) Factoriser le déterminant circulant gauche :  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

11. : On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On pose  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(a) Calculer  $A^n$  à l'aide de la suite de Fibonacci.

(b) En déduire que  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

(c) Calculer  $A^{2n}$  en fonction de  $A$  et  $I_n$  ; élever à la puissance  $n$  et en déduire que  $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$ .

12. :

(a) Montrer que, dans un plan affine,  $M(x, y)$ ,  $M'(x', y')$ ,  $M''(x'', y'')$  sont alignés ssi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) En déduire que dans le plan complexe,  $M(z)$ ,  $M'(z')$ ,  $M''(z'')$  sont alignés ssi

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z' & \bar{z}' & 1 \\ z'' & \bar{z}'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. : Théorème des accroissements finis super-généralisé :

Soient  $f, g, h$  trois fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ .

(a) En considérant  $\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$  montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$

(b) Montrer que cet énoncé contient celui du théorème des accroissements finis généralisés (il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0).$$

(c) Retrouver aussi le théorème des accroissements finis usuel.

(d) Donner l'interprétation cinématique de ce théorème pour un mouvement

$$t \mapsto M(t) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

14. \* :

(a) Montrer à l'aide de manipulations élémentaires, que  $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ c^2 & (b+c)^2 & b^2 \\ c^2 & a^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$  est égal à

$$\frac{(a+b+c)^3}{2} \begin{vmatrix} a+b & a & b \\ c & b+c & b \\ c & a & c+a \end{vmatrix}; \text{ terminer le calcul.}$$

(b) Montrer que si  $abc \neq 0$ ,  $D'(a, b, c) = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & (b+c)^2 & c^2 \\ a^2 & c^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$  est égal à  $(abc)^4 D(1/a, 1/b, 1/c)$ ; en déduire sa factorisation.

15. : Factoriser  $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ .

16. Déterminant de Cayley-Menger.

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

17. Montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & r & -q \\ -b & -r & 0 & p \\ -c & q & -p & 0 \end{vmatrix} = (ap + bq + cr)^2$$

Indication : si  $r \neq 0$ ,  $\Delta = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} 0 & a & b & ap + bq + cr \\ -a & 0 & r & 0 \\ -b & -r & 0 & 0 \\ -c & q & -p & 0 \end{vmatrix}$ .

18.  $A = \begin{vmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & t & -z \\ z & -t & x & y \\ t & z & -y & x \end{vmatrix}$ ; remarquer que  ${}^t C_i \cdot C_j = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \delta_{ij}$ ; en déduire que  $\det(A) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$ ; calculer  $A^{-1}$ .

19. Calculer  $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & \dots & ?? \end{vmatrix}$ , et  $D_{n,k} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{k} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n+k}{0} & \dots & \dots & \binom{n+k}{k} \end{vmatrix}$ , pour  $0 \leq k \leq n$ .

20. :

(a) Montrer que 
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & \dots & a_{n-1} & 1+a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & \dots & \dots & a_n & 1+a_n \end{vmatrix} = 1+a_1+a_2+\dots+a_n$$
 par une succession de combinaisons de lignes ou de colonnes.

(b) En déduire que pour tout  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}^*$  : 
$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 1+x_{n-1} & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+x_n \end{vmatrix} = x_1 x_2 \dots x_n \left( 1 + \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

21. Déterminant de Van der Monde.

(a) Factoriser 
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

(b) On pose  $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$  ; en commençant par la droite, retrancher à chaque colonne la précédente multipliée par  $x_n$ , et montrer que  $V_n(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$  ; en déduire  $V_n(x_1, \dots, x_n)$  (à retenir).

22. Quelques applications des déterminants de van der Monde.

(a) Calculer 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(b) Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $n-1$  prenant des valeurs données en  $n$  points donnés (distincts).

(c) Démontrer que si les  $\alpha_i$  sont des complexes distincts, la famille  $(x \mapsto e^{\alpha_1 x}, x \mapsto e^{\alpha_2 x}, \dots, x \mapsto e^{\alpha_n x})$  est  $\mathbb{C}$ -libre dans  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ .

23. \* : Déterminants circulants (généralisation de 7).

(a) On pose  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$  et  $U = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & u_1 & \dots & u_{n-1} \\ 1 & u_1^2 & \dots & u_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_1^{n-1} & \dots & u_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$  où  $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = u^k$  ( $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ).

Montrer que  $AU = U \cdot \text{diag}(f(1), f(u_1), \dots, f(u_{n-1}))$ , où  $f(z) = a_1 + za_2 + \dots + z^{n-1}a_n$ .

(b) En déduire que  $\det(A) = \prod_{j=0}^{n-1} f(u_j)$ .

(c) Factoriser aussi : 
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

24. \* : Déterminant cyclotomique.

(a) Soit  $\alpha$  une racine  $n$ -ième de 1 ; montrer que  $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = n\delta_{1\alpha}$ .

(b) Soit  $U_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & u_1 & & u_{n-1} \\ 1 & u_1^2 & & \\ \dots & \dots & & \dots \\ 1 & u_1^{n-1} & \dots & u_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$  où  $u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = u^k$  ( $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ) (même matrice que dans 20) et  $\det U_n = D_n$ ;  
calculer  $D_1, D_2, \dots, D_4$ .

(c) En faisant bien attention de ne pas confondre le  $i$  complexe, et le  $i$  entier, on peut remarquer que  $U_n(i, j) = u^{ij}$ . Montrer que  $U_n \overline{U_n} = nI_n$ . En déduire que  $U_n$  est inversible et exprimer son inverse.

(d) Montrer que  $D_n = n^{n/2}$ . On se propose de calculer maintenant exactement  $D_n$ .

(e) Posons  $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$  ( $\alpha$  est donc une racine carrée de  $u$ ). En remarquant que  $D_n$  est un déterminant de Van der Monde, montrer que

$$D_n = \prod_{0 \leq k < l \leq n-1} \alpha^{k+l} \prod_{0 \leq k < l \leq n-1} i \underbrace{\prod_{0 \leq k < l \leq n-1} 2 \sin\left(\frac{l-k}{n}\pi\right)}_R$$

(f) Montrer que  $R = |D_n|$

(g) Montrer que  $\sum_{0 \leq k < l \leq n-1} k+l = \frac{n(n-1)^2}{2}$ .

(h) En déduire que  $D_n = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}} n^{n/2}$ . Vérifier les calculs du b).

25. :

(a) Construire une matrice d'ordre 4 à coefficients entiers non nuls dont le déterminant vaut 1 ; déterminer son inverse.

(b) \* : Démontrer qu'une matrice inversible à coefficients entiers a une inverse à coefficients entiers ssi son déterminant est égal à  $\pm 1$ . Appliquer ceci à la résolution du sujet d'étude 25. b) du premier trimestre.