

III. ENSEMBLES

Nota : \mathbb{E} désigne un ensemble, A, B, C des parties de \mathbb{E} .

1. : $\mathbb{E} = \{a, b\}$; à quel ensemble appartiennent les objets suivants ?

(a, b) ; $\{a\}$; $(a, \{b\})$; $(\{a\}, \{b\})$; $\{\{a\}, \{b\}\}$; (a, E) ; $\{\emptyset\}$; $(\emptyset, \{a\})$.

2. : On définit la somme de deux parties A et B de \mathbb{R} par $A+B = \{a+b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. On demande de déterminer les ensembles suivants :

(a) $\mathbb{R} + \mathbb{R}$

(b) $\mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^*$

Correction : il est clair que $\mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^* \subset \mathbb{R}$; montrons que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^*$; soit donc x un réel ;

si $x > 0$, $x = x + 1 - 1 \in \mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^*$

si $x < 0$, $x = 1 + x - 1 \in \mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^*$

si $x = 0$, $x = 1 + (-1) \in \mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^*$

ce qui montre $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^*$; donc $\mathbb{R}_+^* + \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}$

(c) $\mathbb{R}_+ + \{1\}$

(d) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$

(e) $\mathbb{Q} + \overline{\mathbb{Q}}$ (complémentaire pris dans \mathbb{R})

(f) $\overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}}$

(g) $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$

3. : Comparer $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$ et $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

4. :

(a) Supposons qu'il existe un ensemble X quelconque tel que $(A \cup X) \subset (B \cup X)$ et $(A \cap X) \subset (B \cap X)$. Montrer que $A \subset B$.

Indication : soit prendre un élément de A et montrer qu'il appartient à B , soit partir de l'égalité : $A = A \cap (A \cup X)$.

(b) Qu'en déduit-on donc s'il existe X tel que : $(A \cup X) = (B \cup X)$ et $(A \cap X) = (B \cap X)$?

5. : Expliciter les ensembles suivants :

(a) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right], \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right], \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right], \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right]$

(b) $\bigcup_{0 < \varepsilon < \alpha}]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \bigcup_{0 < \varepsilon < \alpha}]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \bigcup_{0 < \varepsilon < \alpha}]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[, \bigcup_{0 < \varepsilon < \alpha}]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, où α est un réel strictement positif fixé.

IV. DÉNOMBREMENTS

6. : Soit \mathbb{E} un ensemble de taille n et A une partie de E de taille p ; dénombrer les parties X de \mathbb{E} vérifiant :

(a) $A \cup X = A$

(b) $A \cap X = \emptyset$

(c) $A \cap X = A$

(d) $A \cup X = \mathbb{E}$

7. : Soit \mathbb{E} un ensemble de cardinal n .

(a) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.

Indication : discuter suivant le nombre d'éléments de A , et déterminer le nombre de parties B possibles dans chaque cas.

(b) En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.

(c) En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E vérifiant $A \sqcup B \sqcup C = \mathbb{E}$.

(la notation de la réunion avec des symboles à angles droit : $A \sqcup B \sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)

Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct.

(d) * Généraliser (c) à un nombre p de parties de \mathbb{E} .

8. : Soit \mathbb{E} un ensemble de cardinal n , p et q deux entiers naturels dont la somme est $\leq n$;

(a) On demande de dénombrer de trois façons différentes les couples (A, B) où A et B sont des parties disjointes de E de cardinaux respectifs p et q .

(b) En déduire que $\binom{n}{p} \binom{n-p}{q} = \binom{n}{q} \binom{n-q}{p} = \binom{n}{p+q} \binom{p+q}{p}$.

(c) En déduire par exemple : $(n-p) \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p} = (p+1) \binom{n}{p+1}$

9. :

(a) Combien le mot *mississippi* possède-t-il d'anagrammes ?

(b) Quel est le coefficient de $mp^2s^4i^4$ dans $(m+p+s+i)^{11}$?

(c) * Généraliser (a) et (b).

10. Une loterie possède n billets dont p sont gagnants ;

(a) Ayant acheté q billets, quelle probabilité ai-je d'en avoir au moins un gagnant ? Application numérique : $n = 1000, p = 30$, déterminer q pour que cette probabilité soit supérieure à $1/2$.

La suite est un sujet d'étude **

(b) ** Quelle est la probabilité d'avoir exactement k billets gagnants ?

(c) ** Quelle est l'espérance du nombre de billets gagnants parmi mes billets ? Pour quel q cette espérance est-elle supérieure à 1 ?

(d) ** Sachant que chaque lot vaut en moyenne r euros et que chaque billet coûte s euros, déterminer l'espérance de gain quand j'achète q billets (à savoir l'espérance de l'argent rapporté par les lots moins les qs euros).

(e) ** Pour quel q cette espérance de gain est-elle maximale ?

11. * : Soit S_n le nombre de surjections d'un ensemble \mathbb{E} à n éléments vers un ensemble à k éléments. ($n \geq k \geq 0$)

(a) Montrer que $k^n = S_n^k + C_k^1 S_n^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} S_n^1$.

(b) En déduire S_n^k .

(c) Montrer que le nombre de partitions de \mathbb{E} est $\frac{S_n^1}{1!} + \frac{S_n^2}{2!} + \dots + \frac{S_n^n}{n!}$.

12. * : Dénombrer les applications surjectives d'un ensemble à $n+1$ (resp. $n+2, n+3$) éléments sur un ensemble à n éléments ; ** généraliser à $n+k$.

13. * : Dénombrer les applications croissantes (resp. strictement croissantes de $[[1, n]]$ dans $[[1, m]]$).

14. * : Déterminer la moyenne du minimum de p nombres distincts choisis dans $[[1, n]]$; en déduire la moyenne de leur maximum.

15. * : Les familles intersectantes.

Étant donné un ensemble fini E ayant n éléments, on désigne par *famille intersectante*, un ensemble \mathcal{F} de parties de E telles que deux d'entre elles ont toujours au moins un élément en commun.

(a) Soit F un élément d'une famille intersectante \mathcal{F} ; que peut-on dire de \overline{F} ? En déduire que $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

(b) Déterminer toutes les familles intersectantes composées de 2^{n-1} parties.

V. RELATIONS

16. : Trouver l'erreur dans l'affirmation : "une relation dans \mathbb{E} qui est symétrique et transitive est réflexive ; en effet, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$ et donc par transitivité, $x\mathcal{R}x$ ". Donner un contre-exemple.

17. : Remplir le tableau :

	réflexive	$\begin{cases} \text{a. symétrique} \\ \text{b. antisymétrique} \end{cases}$	transitive	exemple a.	exemple b.
1	×	×	×	.	.
2		×	×	.	
3	×		×	.	
4	×	×		.	
5	×			.	
6		×		.	
7			×	.	
8				.	

18. : Dénombrer dans un ensemble \mathbb{E} à n éléments :

- les relations.
- les relations réflexives.
- les relations réflexives et symétriques .
- les relations symétriques.
- les relations réflexives et antisymétriques.
- les relations antisymétriques.
- les relations symétriques et antisymétriques.

19. : Etudier la relation de lien verbal "a pour carré" ($xRy \Leftrightarrow y = x^2$) dans \mathbb{R} , puis dans \mathbb{C} (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité).

20. * : Montrer qu'une relation R dans \mathbb{E} vérifie la propriété

$$\forall x, y, z \in \mathbb{E} \quad xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz$$

(comme est réputée se comporter la relation "être ami de") si et seulement si \mathbb{E} est la réunion de deux sous-ensembles disjoints F et G tels que les restrictions de R à F et G soient des relations d'équivalence (i.e. des relations réflexives, symétriques et transitives).

21. : Caractérisation de la borne supérieure pour un ensemble totalement ordonné.

Soit \mathbb{E} un ensemble muni d'une relation d'ordre total \preccurlyeq , et A une partie non vide de \mathbb{E} .

- Montrer que $m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ majore } A \\ \forall x \prec m \quad \exists a \in A / x \prec a \preccurlyeq m \end{cases}$.
- En déduire que si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et " \preccurlyeq " = " \leq " alors $m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ majore } A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A / m - \varepsilon < a \leq m \end{cases}$.

- (c) Revenant au cas général, déduire du (a) que si $m = \sup A$ et $m \notin A$ alors pour tout élément $x < m$ de \mathbb{E} , il existe une infinité d'éléments de A compris entre x et m .

22. : Soient f et g deux fonctions réelles définies et bornées sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On considère $A = \sup_{x \in I} (f(x)) + \sup_{x \in I} (g(x))$ et $B = \sup_{x \in I} (f(x) + g(x))$

- (a) Donner un exemple où $A = B$ et un exemple où $A \neq B$.
 (b) Déterminer une inégalité valable dans le cas général entre A et B .
 (c) Que peut-on dire quand l'une des fonctions est constante ?
 (d) * Que peut-on dire quand f et g sont croissantes ?

23. * : A et B sont des parties de \mathbb{R} ; on demande de trouver et prouver des formules pour

- (a) $\sup(A \cup B)$
 (b) $\sup(A + B)$
 (c) $\sup(AB)$

On pourra utiliser la notation $A_+ = A \cap \mathbb{R}_+$ et $A_- = A \cap \mathbb{R}_-$.

24. * : Déterminer $\inf_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ où les a_i sont des réels fixés ; cette borne inférieure est-elle atteinte ? (Commencer par regarder $n = 1$, puis $n = 2$).

25. * : On considère l'ordre lexicographique défini sur \mathbb{R}^2 par

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

- (a) Montrer que c'est une relation d'ordre totale.
 (b) Existe-t-il une bijection f de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^2 qui soit croissante, c'est-à-dire telle que $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$?