III. **ENSEMBLES**

1. : $E=\{a,b\}$; à quel ensemble appartiennent les objets suivants ?
(a,b) ; $\{a,b\}$; $\{(a,b)\}$; $(a,\{b\})$; $(\{a\},\{b\})$; $\{\{a\},\{b\}\}$; (a,E) ; $(\emptyset,\{a\})$.

2. : On définit la somme de deux parties A et B de $\mathbb{R}$ par $A+B=\{a+b \ / \ a\in A \text{ et } b\in B\}$. On demande de déterminer les ensembles suivants :

   (a) $\mathbb{R}+\mathbb{R}$

   (b) $\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*$
   Correction : il est clair que $\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*\subset\mathbb{R}$; montrons que $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*$; soit donc x un réel ;
   si $x>0$, $x=x+1-1\in\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*$
   si $x<0$, $x=1+x-1\in\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*$
   si $x=0$, $x=1+(-1)\in\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*$
   ce qui montre $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*$; donc $\mathbb{R}_+^*+\mathbb{R}_-^*=\mathbb{R}$

   (c) $\mathbb{R}_++\{1\}$

   (d) $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}$

   (e) $\mathbb{Q}+\overline{\mathbb{Q}}$ (complémentaire pris dans $\mathbb{R}$)

   (f) $\overline{\mathbb{Q}}+\overline{\mathbb{Q}}$

   (g) $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}$

3. : Comparer $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$ et $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.

4. :

   (a) Supposons qu'il existe un ensemble X quelconque tel que $(A\cup X)\subset(B\cup X)$ et $(A\cap X)\subset(B\cap X)$. Montrer que $A\subset B$.
   Indication : soit prendre un élément de A et montrer qu'il appartient à B, soit partir de l'égalité : $A=A\cap(A\cup X)$.

   (b) Qu'en déduit-on donc s'il existe X tel que : $(A\cup X)=(B\cup X)$ et $(A\cap X)=(B\cap X)$?

5. : Expliciter les ensembles suivants :

   (a) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$.

   (b) $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<\alpha}]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$, $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<\alpha}[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$, $\bigcup\limits_{0<\varepsilon\leqslant\alpha}]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$, $\bigcup\limits_{0<\varepsilon\leqslant\alpha}[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$, où α est un réel strictement positif fixé.

V. **RELATIONS**

6. : Trouver l'erreur dans l'affirmation : “une relation dans E qui est symétrique et transitive est réflexive ; en effet, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$ et donc par transitivité, $x\mathcal{R}x$”. Donner un contre-exemple.

7. : Remplir le tableau :

	réflexive	$\begin{cases} \text{a. symétrique} \\ \text{b. antisymétrique} \end{cases}$	transitive	exemple a.	exemple b.
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\vdots$	$\vdots$
2		$\times$	$\times$	$\vdots$	
3	$\times$		$\times$	$\vdots$	
4	$\times$	$\times$		$\vdots$	
5	$\times$			$\vdots$	
6		$\times$		$\vdots$	
7			$\times$	$\vdots$	
8				$\vdots$	

8. : Dénombrer dans un ensemble $\mathbb{E}$ à n éléments :

(a) les relations.
(b) les relations réflexives.
(c) les relations réflexives et symétriques .
(d) les relations symétriques.
(e) les relations réflexives et antisymétriques.
(f) les relations antisymétriques.
(g) les relations symétriques et antisymétriques.

9. : Etudier la relation de lien verbal "a pour carré" ($xRy \Leftrightarrow y = x^2$) dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$ (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité).

10. * : On considère une relation R symétrique dans E vérifiant des propriétés souvent proférées dans la vie courante concernant la relation d'amitié :

(a) 1) les amis de mes amis sont mes amis, autrement dit :

$$\forall x, y, z \in E \quad xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz$$

2) les ennemis de mes ennemis sont mes amis, autrement dit :

$$\forall x, y, z \in E \quad x \not{R} y \text{ et } y \not{R} z \Rightarrow xRz$$

(b) Montrer que les ennemis de mes amis sont mes ennemis et que les amis de mes ennemis sont mes ennemis aussi.

(c) Montrer que R est une relation d'équivalence avec au plus deux classes d'équivalence. Autrement dit, soit tout le monde est ami, soit il y a deux blocs antagonistes formés d'amis.
Peut-être une explication de la tendance au bipartisme ?

11. : Caractérisation de la borne supérieure pour un ensemble totalement ordonné.
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre total $\preccurlyeq$, et A une partie non vide de E.

   (a) Montrer que $m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ majore } A \\ \forall x \in E \quad x \prec m \quad \Rightarrow \ \exists a \in A \ / \ x \prec a \preccurlyeq m \end{cases}$.

   (b) En déduire que si $E = \mathbb{R}$ et "$\preccurlyeq$" est la relation d'ordre habituelle alors $m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ majore } A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a \in A \ / \ m - \varepsilon < a \leqslant m \end{cases}$

   (c) Revenant au cas général, déduire du (a) que si $m = \sup A$ et $m \notin A$ alors pour tout élément $x \prec m$ de $\mathbb{E}$, il existe une *infinité* d'éléments de A compris entre x et m.

12. : Soient f et g deux fonctions réelles définies et bornées sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On considère $A = \sup\limits_{x \in I} (f(x)) + \sup\limits_{x \in I} (g(x))$ et $B = \sup\limits_{x \in I} (f(x) + g(x))$

   (a) Donner un exemple où $A = B$ et un exemple où $A \neq B$.

   (b) Déterminer une inégalité valable dans le cas général entre A et B.

   (c) Que peut-on dire quand l'une des fonctions est constante ?

   (d) * Que peut-on dire quand f et g sont croissantes ?

13. * : A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}$; on demande de trouver et prouver des formules pour

   (a) $\sup(A \cup B)$

   (b) $\sup(A + B)$

   (c) $\sup(AB)$, avec ici A et B inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

14. * : Déterminer $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \sum\limits_{i=1}^{n} |x - a_i|$ où les a_i sont des réels fixés ; cette borne inférieure est-elle atteinte ? (Commencer par regarder $n = 1$, puis $n = 2$).

15. : On considère l'ordre lexicographique défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x, y) \leqslant (x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')$$

   (a) Montrer que c'est une relation d'ordre total.

   (b) * Existe-t-il une bijection f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ qui soit croissante, c'est-à-dire telle que $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$?