

Dans tous ces exercices, \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} et \mathbb{E} est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. : Dire dans quel \mathbb{K} -espace vectoriel sont inclus les ensembles suivants (il faut préciser \mathbb{K} dans certains cas). En sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) \mathbb{Z}

(b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 / x = 0\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 / x \neq 0\}$

(e) $\{(x, 1) / x \in \mathbb{K}\}$

(f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x = y\}$

(g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x \neq y\}$

(h) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) / \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \right\}$

(i) $SM_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) / \begin{array}{l} a + b = c + d \\ = a + c \\ = b + d \end{array} \right\}$ (ensemble des matrices "semi-magiques" d'ordre 2).

(j) $M_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) / \begin{array}{l} a + b = c + d \\ = a + c \\ = b + d \\ = a + d \\ = b + c \end{array} \right\}$ (ensemble des matrices "magiques" d'ordre 2).

(k) $M_3(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K}) / \begin{array}{l} a + b + c = d + e + f = g + h + i \\ = a + d + g = b + e + h = c + f + i \\ = a + e + i = c + e + g \end{array} \right\}$

(l) $\mathfrak{S}_n(\mathbb{K}) = \{(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) / \forall i, j \ a_{ij} = a_{ji}\}$ (matrices symétriques).

(m) $\mathfrak{A}_n(\mathbb{K}) = \{(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) / \forall i, j \ a_{ij} = -a_{ji}\}$ (matrices antisymétriques).

(n) $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est paire}\}$

(o) $\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est impaire}\}$

(p) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ polynomiale et } \deg f = n\}$ ($n \in \mathbb{N}$)

(q) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ polynomiale et } \deg f \leq n\}$ (noté $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

(r) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 0\}$

(s) $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(1) = 1\}$ (montrer que G est un sous-espace *affine* de direction le précédent)

(t) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' = f\}$ (montrer que $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

(u) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'' = -f\}$ (montrer que $F \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

(v) $\mathcal{P}_T = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est périodique de période } T\}$

(w) $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est périodique}\}$

(x) $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ est périodique de période rationnelle}\}$

(y) $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g \text{ et } h \text{ croissantes} / f = g - h\}$

(z) : On fixe $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $F_g = \{f.g / f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ (on pourra remarquer que F_g n'est autre que l'ensemble des applications qui s'annulent aux points où g s'annule).

() $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ est arithmétique}\}$

() $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ est géométrique}\}$

() $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$

() $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ est convergente}\}$

- () $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim u_n = 0\}$
 () $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \lim u_n = 1\}$ (montrer que c'est un sous-espace *affine* de direction le précédent)
 () $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n) \text{ est bornée}\}$

2. : Dans les cas c), f), i), j), k), l), m), q), t), u) de l'exercice précédent, déterminer une base du sev correspondant.

3. : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} .

- (a) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de \mathbb{E} si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
 (b) En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

4. : Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} . On pose

$$A = F \cap (G + H) ; B = (F \cap G) + (F \cap H)$$

- (a) Montrer que $B \subset A$, mais que l'inclusion peut être stricte.
 (b) Montrer que si F contient G ou H , alors $A = B$.
 (c) Montrer que $B = F \cap (G + (F \cap H))$.
 (d) Montrer que $\begin{cases} F \cap G = F \cap H \\ F + G = F + H \\ G \subset H \end{cases} \Rightarrow G = H$
 (e) Etudier les inclusions entre $C = F + (G \cap H)$ et $D = (F + G) \cap (F + H)$.
 (f) **Montrer que si $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$, les deux autres égalités similaires sont réalisées, ainsi que les trois égalités du type : $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$.

5. :

- (a) Déterminer un système d'équations cartésiennes du sous-espace de \mathbb{K}^4 engendré par

$$\mathcal{F} = \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

- (b) Déterminer une famille engendrant le sous-espace vectoriel \mathbb{K}^5 dont un système d'équations cartésiennes est
- $$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \\ x + y = z + t = u \end{cases}$$

$$\text{Rep : (a) } \begin{cases} 8x - 6y - 7z = 0 \\ 5x - 9y + 7t = 0 \end{cases} \quad \text{(b) } \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{c} 10 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

6. : Montrer que $(\exp, x \mapsto xe^x, x \mapsto xe^x \ln x, x \mapsto x \ln x, x \mapsto x, \ln)$ est une famille libre de $\mathcal{F}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

7. : Les familles de Van der Monde ;

- (a) On donne dans \mathbb{K}^3 les vecteurs $(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2)$; à quelle CNS portant sur a, b, c forment-ils une famille libre ?
 (b) Idem pour $(1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2)$.
 (c) * Généraliser.

8. :

- (a) Soient a, b, c trois éléments de \mathbb{K} distincts. Montrer que $((a^n), (b^n), (c^n))$ est une famille libre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
 (b) Généraliser.

9. * : On donne

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}; f_2 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}; f_3 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}; f_4 : x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$$

- (a) Déterminer le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4) dans $\mathcal{F}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ (indication : $1+\operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2$ ou bien calculer $(f_1 \pm f_2)^2$).
 (b) Déterminer le rang de (f_1, f_2, f_3, f_4) dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

10. * :

- (a) Démontrer que $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ est libre si et seulement si

$$\forall i \in [1, p] \quad \vec{x}_i \notin \operatorname{Vect} \left((\vec{x}_j)_{1 \leq j < i} \right)$$

Remarque : $\operatorname{Vect}(\emptyset) = \{ \vec{0} \}$.

- (b) : Démontrer que $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ est liée si et seulement si

$$\exists i_0 \in [1, p] \quad / \quad \operatorname{vect} \left(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i_0}, \dots, \vec{x}_p \right) = \operatorname{vect}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p).$$

11. * : Démonstration du théorème (fort) de la base incomplète :

Soit $\mathcal{G} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une famille génératrice de \mathbb{E} et $\mathcal{L} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille libre de \mathbb{E} .

On rappelle que la réunion de deux listes est leur mise bout à bout ; par exemple : $(a, b) \cup (c, d) = (a, b, c, d)$.

- (a) A l'aide du lemme glouton, montrer qu'il existe une sous-famille \mathcal{F} de \mathcal{G} telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit génératrice.
 (b) En déduire qu'il existe une sous-famille \mathcal{F}_0 de \mathcal{G} telle que $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{F}_0$ soit une base de \mathbb{E} .
 (c) : Illustration de ce théorème ; on considère les vecteurs de \mathbb{K}^4 définis par :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- i. Montrer que $\mathcal{L} = (a, b)$ est libre et que $\mathcal{G} = (c, d, e, f, g, h)$ est génératrice.
 ii. Compléter \mathcal{L} en une base de \mathbb{K}^4 en puisant dans \mathcal{G} .

12. : Déterminer les rangs r des familles suivantes de \mathbb{K}^4 et les $4 - r$ relations entre les vecteurs de chaque famille.

(a) $\mathcal{F}_1 = \left(a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\mathcal{F}_2 = \left(a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(c) $\mathcal{F}_3 = \left(a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$

13. : Déterminer le rang de la famille \mathcal{F} du \mathbb{C} -espace \mathbb{C}^4 et éventuellement les relations entre les vecteurs de \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \left(a = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \\ -i \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 2-i \\ 1+i \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2 \\ -1-i \end{pmatrix} \right)$$

quel est le rang de \mathcal{F} dans le \mathbb{R} -espace \mathbb{C}^4 ?

14. : Soient les vecteurs de \mathbb{K}^3 :

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B} = (a, b, c)$; est-ce une base de \mathbb{K}^3 ? Si oui, donner les coordonnées de x dans cette base.

15. : Soit $F = \text{Vect}(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}(d, e)$ avec :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer les dimensions de F , G , $F + G$, $F \cap G$.
 (b) Déterminer une base de $F \cap G$.
 Réponse : (d).

16. : On considère les vecteurs de \mathbb{K}^5 suivants :

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $\text{Vect}(a, b, c) = F$, $\text{Vect}(d, e) = G$.

- (a) Montrer que $\mathbb{K}^5 = F \oplus G$.
 (b) Déterminer un système d'équations cartésiennes de F et de G .
 (c) Donner les expressions analytiques des deux projections p et q associées à cette décomposition de \mathbb{K}^5 , c'est-à-dire,

$$\text{si } p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \\ u' \end{pmatrix}, \text{ les expressions de } x', y', z', t' \text{ en fonction de } x, y, z, t, \text{ et de même pour } q.$$

17. : Soit I un ensemble fini. Déterminer une base et la dimension de \mathbb{K}^I .

Même chose pour \mathbb{E}^I où \mathbb{E} est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

18. * : soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$; A est dite *centrosymétrique* si :

$$\forall i, j \quad a_{i,j} = a_{n+1-i, n+1-j}$$

Montrer que l'ensemble $\mathfrak{CS}_n(K)$ des matrices centrosymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, en donner une base et la dimension (on séparera les cas n pair et n impair).

19. * : Soit \mathbb{E} un \mathbb{C} -espace vectoriel ; \mathbb{E} peut aussi être muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel, en restreignant l'opération externe $\mathbb{C} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$.

- (a) Montrer qu'une famille finie liée sur \mathbb{R} (ou \mathbb{R} -liée) est \mathbb{C} -liée, mais que la réciproque est fautive. Qu'en déduit-on pour les familles libres ?
 (b) Une famille finie \mathbb{R} -génératrice est-elle \mathbb{C} -génératrice ?
 (c) Une famille finie \mathbb{C} -génératrice est-elle \mathbb{R} -génératrice ?
 (d) Montrer que si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une \mathbb{C} -base de \mathbb{E} , alors $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, i\vec{e}_1, \dots, i\vec{e}_n)$ est une \mathbb{R} -base de \mathbb{E} . En déduire une relation entre la \mathbb{R} -dimension de \mathbb{E} et sa \mathbb{C} -dimension.
 (e) Si \mathcal{F} est une famille finie de \mathbb{E} , démontrer que $\text{rg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}) \leq \text{rg}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}) \leq 2 \times \text{rg}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$.

20. * :

- (a) Si (f_1, \dots, f_n) est libre dans le \mathbb{C} -espace $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, $(\operatorname{Re}(f_1), \dots, \operatorname{Re}(f_n))$ est elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
- (b) Montrer que si $(f_1, \dots, f_n, \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n})$ est \mathbb{C} -libre, alors $(\operatorname{Re}(f_1), \dots, \operatorname{Re}(f_n), \operatorname{Im}(f_1), \dots, \operatorname{Im}(f_n))$ est \mathbb{R} -libre.
- (c) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des nombres complexes distincts. Montrer que $(x \mapsto e^{\alpha_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\alpha_n x})$ est \mathbb{C} -libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
- (d) Soit $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ des réels strictement positifs distincts.
Montrer que $(x \mapsto \cos(\omega_1 x), x \mapsto \cos(\omega_2 x), \dots, x \mapsto \cos(\omega_n x), x \mapsto \sin(\omega_1 x), \dots, x \mapsto \sin(\omega_n x))$ est \mathbb{R} -libre.
21. * : Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} de dimension n . Dire (preuve à l'appui) si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux (faire des dessins).

- (a) Le complémentaire d'un hyperplan est une droite.
- (b) Si $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$ alors $\dim(F + G + H) = \dim F + \dim G + \dim H$.
- (c) Si H et K sont deux hyperplans de \mathbb{E} alors $H \cup K \neq \mathbb{E}$.
- (d) Si P_1 et P_2 sont deux plans de \mathbb{E} , vérifiant $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ alors $\dim \mathbb{E} \geq 4$.
- (e) On suppose que F est un hyperplan ; alors 1 vecteur non nul du complémentaire de F dans \mathbb{E} engendre nécessairement un supplémentaire de F .
- (f) On suppose que F est de dimension $n - 2$; alors 2 vecteurs linéairement indépendants du complémentaire de F dans \mathbb{E} engendrent nécessairement un supplémentaire de F .

- (a) Soient A, B, C trois ensembles finis, vérifier que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- (b) Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} , \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'égalité :

$$\dim(F + G + H) = \dim F + \dim G + \dim H - \dim F \cap G - \dim G \cap H - \dim F \cap H + \dim F \cap G \cap H$$

n'est pas toujours vérifiée, mais qu'elle l'est ssi $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$ (cf. exercice 4).

22. : Soit $\mathbb{E} = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$; $x_0 \in I$; $F = \{f \in \mathbb{E} \mid f(x_0) = 0\}$

- (a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} .
- (b) Montrer que l'ensemble G des fonctions constantes de I dans \mathbb{R} est un supplémentaire de F dans \mathbb{E} . Qu'en déduit-on pour F ?
- (c) Quel est le projeté g d'une fonction f sur G parallèlement à F ? Faire une figure avec les courbes de f et g .

23. : Soit $\mathbb{E} = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $x_0 \in \mathbb{R}$; $F = \{f \in \mathbb{E} \mid f(x_0) = f'(x_0) = 0\}$

- (a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} .
- (b) Montrer que l'ensemble G des fonctions affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est un supplémentaire de F dans \mathbb{E} et en déduire la codimension de F .
- (c) Quel est le projeté g de f sur G parallèlement à F ? Faire une figure avec les courbes de f et g .

24. * : Montrer que $\mathbb{K}^-(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg F \leq 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$ mais que $\mathbb{K}^+(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg F \geq 0\}$ n'en est pas un.
Déterminer un supplémentaire simple de $\mathbb{K}^-(X)$ dans $\mathbb{K}(X)$.

25. : Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p)$ une famille finie de \mathbb{E} .

Montrer qu'une sous-famille de \mathcal{F} a un rang supérieur ou égal à $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) - \text{nombre de vecteurs enlevés}$.

26. : Soit \mathbb{E} un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n ; F et G des sous-espaces de \mathbb{E} , avec $\dim F = p$, $\dim G = q$.

- (a) Montrer que : $p + q - n \leq \dim(F \cap G) \leq \min(p, q)$ et donner un exemple pour chaque cas d'égalité.

(b) Plus généralement, si $(F_i)_{i \in [1;p]}$ sont des sous-espaces de \mathbb{E} avec $\dim F_i = n_i$ pour tout $i \in [1;p]$, montrer que :

$$\sum_{i=1}^p n_i - (p-1)n \leq \dim \bigcap_{i=1}^p F_i \leq \min_{1 \leq i \leq p} (n_i)$$

ce qui peut s'écrire :

$$n - \sum_{i=1}^p \operatorname{codim} F_i \leq \dim \bigcap_{i=1}^p F_i \leq \min_{1 \leq i \leq p} (\dim F_i)$$

Regarder par exemple le cas particulier d'une intersection d'hyperplans.

27. : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls.

- (a) Soit $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ une équation linéaire homogène à n inconnues. Montrer que l'ensemble des solutions est un hyperplan de \mathbb{K}^n .
- (b) Dédire de l'exercice précédent et de la première question le fait que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de p équations à n inconnues est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à $n - p$.

28. * :

- (a) Démontrer que l'ensemble des étoiles magiques à 5 branches est un sous espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 6 de \mathbb{K}^{10} . Déterminer la forme générale de ces étoiles, et en déduire que la dimension est 6 exactement. Donner une base de ce sous-espace.
- (b) Idem pour les étoiles magiques à 6 branches.