

## ÉTUDES DE FONCTIONS

1. : Étudier complètement les fonctions en moins de 10 minutes (tracé compris).

(a)  $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$

(b)  $f : x \mapsto x \ln x$

(c)  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

(d)  $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

(e)  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

(f)  $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  (moins d'une minute)

(g)  $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$  (moins de deux minutes)

(h)  $f : x \mapsto x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$

(i)  $f : x \mapsto x - \sqrt{x}$

(j)  $f : x \mapsto x^x$

(k)  $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$

2. : Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

(a)  $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$

(b)  $f : x \mapsto \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$

(c)  $f : x \mapsto [2x] - x$

(d)  $f : x \mapsto \frac{1}{x - [x]}$

(e)  $f : x \mapsto \tan \frac{x}{2} + \sin x$

3. : Étudier  $f$  au voisinage de  $x_0$ , tracer  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $M_0(x_0, f(x_0))$  (on étudiera la possibilité de prolonger  $f$  par continuité, la dérivabilité, la position de la courbe par rapport à la tangente...)

(a)  $f(x) = x^\alpha \ln x$  ( $x_0 = 0$ )

(b)  $f(x) = x^{x^\alpha}$  ( $x_0 = 0$ )

(c)  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$  ( $x_0 = 0$ )

(d)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$  ( $x_0 = 0$ )

(e)  $f(x) = \left| 1 + \frac{1}{x} \right|^x$  ( $x_0 = 0$ ;  $x_0 = -1$ )

(f)  $f(x) = (1 + \sin x)^{\cot x}$  ( $x_0 = 0$ ;  $x_0 = \pi$ ;  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ )

(g)  $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$  ( $x_0 = 0$ )

4. \* : Démontrer à l'aide d'un développement limité que  $\mathcal{C}_f$  admet un point d'inflexion en  $(x_0, f(x_0))$  et tracer la courbe au voisinage de ce point :

(a)  $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos x$  et  $x_0 = \frac{\pi}{3}$

(b)  $f(x) = x^2(3 - 2 \ln x)$  et  $x_0 = 1$

(c)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$  et  $x_0 = \frac{1}{2}$

(d)  $f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$  et  $x_0 = 0$  (ENAC 2000).

5. Etudier les branches infinies des courbes des fonctions suivantes au voisinage de  $+\infty$ .

$f(x) =$	direction asymptotique ? Si oui, de pente ....?	asymptote ? Si oui, d'équation....?	Courbe asymptote	Allure
1				...
$x - 1$				...
$x^2$				...
$\sqrt{x}$				...
$\sqrt{x} - x$				...
$\frac{e^x}{x}$				...
$x + \frac{1}{x}$				...
$x^2 + \frac{1}{x}$				...
$\sqrt{x^2 + x}$				...
$\sqrt{x^4 + x^2}$				...
$\sin x$				...
$x + \sin x$				...
$x \sin x$				...
$x \sin \frac{1}{x}$				...
$x^2 \sin \frac{1}{x}$				...
$x^3 \sin \frac{1}{x}$				...

6. : Déterminer un développement limité en  $+\infty$  jusqu'au premier terme de limite nulle puis répondre aux questions suivantes : Direction asymptotique ? Asymptote ? Branche parabolique ? Courbe asymptote ? Position de la courbe par rapport à l'asymptote ? Allure de la courbe au voisinage de  $+\infty$  ?

- (a)  $f : x \mapsto \frac{x^3}{x-1}$   
 (b)  $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$   
 (c)  $f : x \mapsto \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$   
 (d)  $f : x \mapsto x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$   
 (e)  $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4}$   
 (f)  $f : x \mapsto \ln(e^{2x} - e^x + 1)$   
 (g)  $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \arctan x$

7. \* Conditions d'existence d'un axe ou d'un centre de symétrie

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles,  $C_f$  la courbe associée.

- (a) Montrer que si  $f$  est dérivable et si  $C_f$  possède pour axe de symétrie la droite  $x = x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$ .  
 (b) Montrer que si  $f$  est polynomiale, alors  $C_f$  possède pour axe de symétrie la droite  $x = x_0$  si et seulement si  $f^{(2k+1)}(x_0) = 0$  pour tout  $k \geq 0$ .  
 (c) Montrer que si  $f$  est 2 fois dérivable et si  $C_f$  possède pour centre de symétrie un point d'abscisse  $x_0$  alors  $f''(x_0) = 0$ .  
 (d) Montrer que si  $f$  est polynomiale, alors  $C_f$  possède pour centre de symétrie un point d'abscisse  $x_0$  si et seulement si  $f^{(2k)}(x_0) = 0$  pour tout  $k \geq 1$ .  
 (e) Applications :  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2$  ;  $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2$ .

8. : Relations entre la limite de la dérivée et l'existence d'une direction asymptotique.

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[A, +\infty[$ .

- (a) Montrer que si  $\lim_{+\infty} f' = 0$ , alors  $C_f$  possède une direction asymptotique horizontale en  $+\infty$ .

Indication : soit  $\varepsilon > 0$  ; montrer grâce au TAF qu'il existe  $B > 0$  tel que si  $x > B$ , alors  $\left| \frac{f(x) - f(B)}{x - B} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$  puis

en déduire qu'il existe  $C > B$  tel que si  $x > C$   $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

REM : cette propriété est la version fonctionnelle du lemme de l'escalier pour les suites : si  $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$ , alors  $\lim \frac{u_n}{n} = 0$ .

- (b) Montrer que la réciproque est fautive.  
 (c) Montrer que si  $\lim_{+\infty} f' = a \in \mathbb{R}$ , alors  $C_f$  possède une direction asymptotique de pente  $a$  en  $+\infty$ .

9. \* : Suite de 8).

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[A, +\infty[$ .

- (a) Montrer que si  $\lim_{+\infty} f' = +\infty$ , alors  $C_f$  possède une direction asymptotique verticale en  $+\infty$ .  
 (b) Montrer que la réciproque est fautive.  
 (c) Montrer que si  $f$  est convexe ou concave sur  $[A, +\infty[$ , alors  $C_f$  possède toujours une direction asymptotique en  $+\infty$ .

10. : Etudier la fonction  $f : x \mapsto (x^2)^x$  (E3A 2000).

11. \* : Étudier et tracer la courbe d'équation cartésienne :  $y^2 = x^2 \ln \frac{1}{x}$ .

12. \* : Étudier et tracer dans trois repères distincts mais ayant un axe des ordonnées commun (unité : 5cm) les fonctions  $f, g, h$  :

$$f : x \mapsto \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \ln |x+1| - \ln |x|$$

$$g : x \mapsto xf(x)$$

$$h : x \mapsto x^2 f(x)$$

- (a) on trouvera un centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$  ;  
 (b) on montrera que  $g$  et  $h$  sont prolongeables par continuité en 0, et on étudiera la dérivabilité en 0 de ces prolongements.  
 (c) on donnera une valeur approchée à  $10^{-1}$  près du réel  $\alpha$ , où  $g$  atteint son minimum, ainsi que de  $g(\alpha)$ .  
 (d) on donnera une valeur approchée à  $10^{-1}$  près du réel  $\beta$ , où  $h$  atteint son maximum, ainsi que de  $h(\beta)$ .  
 (e) on étudiera les branches infinies de la courbe de  $h$  en particulier.

13. \* :

(a) Étudier la fonction  $f : x \mapsto \left| 1 + \frac{1}{x} \right|^x$  (on étudiera avec soin la fonction au voisinage de 0 et la concavité entre  $-1$  et 0)

(b) Étudier la fonction  $g : x \mapsto \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^x$

- Trouver une relation entre  $f$  et  $g$  permettant d'utiliser les résultats du a.
- Montrer que  $g(1+u) \sim |u|$  quand  $u \rightarrow 0$  et en déduire l'étude de  $g$  au voisinage de 1.

14. \* : On définit la famille de fonctions  $f_\lambda$  par :  $f_\lambda : x \mapsto x^{(x^\lambda)}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Étudier  $f_\lambda$  au voisinage de 0.  
 (b) Étudier la position relative des diverses courbes.  
 (c) Déterminer le lieu des points à tangente horizontale quand  $\lambda$  varie (étudier la courbe ainsi décrite).  
 (d) Faire une figure avec une courbe représentative de chaque cas particulier et le lieu précédent.  
 (e) Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f_\lambda \left( 1 - \frac{1}{|\lambda|} \right)$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f_\lambda \left( 1 - \frac{1}{\ln|\lambda|} \right)$ .

15. \* : Soit  $f_m : x \mapsto (m-1)x^3 + x^2 - m$ . On appelle  $\mathcal{C}_m$  sa courbe représentative.

- (a) Déterminer les points communs à toutes les courbes  $\mathcal{C}_m$ .  
 (b) Étudier  $f_m$ .  
 (c) Déterminer le lieu des extrema de  $\mathcal{C}_m$ , ainsi que celui des points d'inflexion.

16. \* : Démontrer qu'il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que  $1 + x + x^2 + \dots + x^{2n}$  reste toujours  $\geq \lambda$  (pour tout  $x$  réel et  $n$  entier naturel).

17. \* :

(a) Étudier la fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x} e^{x \cot x}$ .

- (b) En déduire la localisation des solutions  $z \in \mathbb{C}$  de l'équation  $e^z = \lambda z$  où  $\lambda$  est un réel non nul fixé.

18. \* : Démonstration de la loi de Descartes, à partir du principe de Fermat, énonçant que la lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale.

- (a) Le plan, est rapporté à un repère  $Oxy$  ; la vitesse de la lumière est égale à  $v_1$  dans le 1/2 plan  $y > 0$ , et à  $v_2$  dans le plan  $y < 0$  ; on donne les points  $A(0, h_1)$ ,  $B(L, -h_2)$  et  $M(x, 0)$  ( $h_1, h_2 > 0$ ) ; un rayon lumineux mets un temps  $T$  pour suivre le trajet  $AMB$ . On appelle  $f$  la fonction qui à  $x$  fait correspondre  $T$ .

- (b) Calculer  $T = f(x)$  en fonction de  $x, L, h_1, h_2, v_1, v_2$ .

- (c) Étudier  $f$  et montrer que  $f$  est minimale en  $x_0$  vérifiant  $\frac{x_0}{AM.v_1} = \frac{L - x_0}{BM.v_2}$ .

- (d) En déduire la loi de Descartes.

REM : cette démonstration a été faite par Maupertuis en 1744.