ÉTUDES DE FONCTIONS

1. : Étudier complètement les fonctions en moins de 10 minutes (tracé compris).

   (a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$

   (b) $f : x \mapsto x \ln x$

   (c) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

   (d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

   (e) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

   (f) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ (moins d'une minute)

   (g) $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ (moins de deux minutes)

   (h) $f : x \mapsto x \ln x + (1-x) \ln (1-x)$

   (i) $f : x \mapsto x - \sqrt{x}$

   (j) $f : x \mapsto x^x$

   (k) $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$

2. : Réduire l'intervalle d'étude au maximum et indiquer comment obtenir la courbe entière.

   (a) $f : x \mapsto \sin x - \sin 3x$

   (b) $f : x \mapsto \sin \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{3x}{2}$

   (c) $f : x \mapsto [2x] - x$

   (d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - [x]}$

   (e) $f : x \mapsto \tan \dfrac{x}{2} + \sin x$

3. : Etudier f au voisinage de x_0, tracer $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ (on étudiera la possibilité de prolonger f par continuité, la dérivabilité, la position de la courbe par rapport à la tangente...)

   (a) $f(x) = x^{\alpha} \ln x$ $(x_0 = 0)$

   (b) $f(x) = x^{x^{\alpha}}$ $(x_0 = 0)$

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$ $(x_0 = 0)$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ $(x_0 = 0)$

   (e) $f(x) = \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|^x$ $(x_0 = 0\ ;\ x_0 = -1)$

   (f) $f(x) = (1 + \sin x)^{\cot x}$ $\left(x_0 = 0\ ;\ x_0 = \pi\ ;\ x_0 = \dfrac{3\pi}{2}\right)$

   (g) $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$ $(x_0 = 0)$

4. * : Démontrer à l'aide d'un développement limité que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ et tracer la courbe au voisinage de ce point :

   (a) $f(x) = \sin^2 x - 2\cos x$ et $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

   (b) $f(x) = x^2(3 - 2\ln x)$ et $x_0 = 1$

   (c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ et $x_0 = \dfrac{1}{2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x\text{ch } x - \text{sh } x}{\text{ch } x - 1}$ et $x_0 = 0$ (ENAC 2000).

5. Etudier les branches infinies des courbes des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$.

$f(x) =$	direction asymptotique ? Si oui, de pente ....?	asymptote ? Si oui, d'équation....?	Courbe asymptote	Allure
1				
$x-1$				
x^2				
$\sqrt{x}$				
$\sqrt{x}-x$				
$\dfrac{e^x}{x}$				
$x+\dfrac{1}{x}$				
$x^2+\dfrac{1}{x}$				
$\sqrt{x^2+x}$				
$\sqrt{x^4+x^2}$				
$\sin x$				
$x+\sin x$				
$x\sin x$				
$x\sin\dfrac{1}{x}$				
$x^2\sin\dfrac{1}{x}$				
$x^3\sin\dfrac{1}{x}$				

6. : Déterminer un développement limité en + l'infini jusqu'au premier terme de limite nulle puis répondre aux questions suivantes : Direction asymptotique ? Asymptote ? Branche parabolique ? Courbe asymptote ? Position de la courbe par rapport à l'asymptote ? Allure de la courbe au voisinage de + l'infini ?

(a) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$

(b) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

(c) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^2+1}$

(d) $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

(e) $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4}$

(f) $f : x \mapsto \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right)$

(g) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}\arctan x$

7. * Conditions d'existence d'un axe ou d'un centre de symetrie

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, C_f la courbe associée.

(a) Montrer que si f est dérivable et si C_f possède pour axe de symétrie la droite $x = x_0$ alors $f'(x_0) = 0$.

(b) Montrer que si f est polynomiale, alors C_f possède pour axe de symétrie la droite $x = x_0$ si et seulement si $f^{(2k+1)}(x_0) = 0$ pour tout $k \geqslant 0$.

(c) Montrer que si f est 2 fois dérivable et si C_f possède pour centre de symétrie un point d'abscisse x_0 alors $f''(x_0) = 0$.

(d) Montrer que si f est polynomiale, alors C_f possède pour centre de symétrie un point d'abscisse x_0 si et seulement si $f^{(2k)}(x_0) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

(e) Applications : $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2$; $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2$.

8. : Relations entre la limite de la dérivée et l'existence d'une direction asymptotique.

Soit f une fonction dérivable sur $[A, +\infty[$.

(a) Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$, alors C_f possède une direction asymptotique horizontale en $+\infty$.

Indication : soit $\varepsilon > 0$; montrer grâce au TAF qu'il existe $B > 0$ tel que si $x > B$, alors $\left|\dfrac{f(x) - f(B)}{x - B}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ puis en déduire qu'il existe $C > B$ tel que si $x > C$ $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$.

REM : cette propriété est la version fonctionnelle du lemme de l'escalier pour les suites : si $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors $\lim \dfrac{u_n}{n} = 0$.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

(c) Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = a \in \mathbb{R}$, alors C_f possède une direction asymptotique de pente a en $+\infty$.

9. * : Suite de 8).

Soit f une fonction dérivable sur $[A, +\infty[$.

(a) Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = +\infty$, alors C_f possède une direction asymptotique verticale en $+\infty$.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

(c) Montrer que si f est convexe ou concave sur $[A, +\infty[$, alors C_f possède toujours une direction asymptotique en $+\infty$.

10. : Etudier la fonction $f : x \mapsto \left(x^2\right)^x$ (E3A 2000).

11. * : Étudier et tracer la courbe d'équation cartésienne : $y^2 = x^2 \ln \dfrac{1}{x}$.

12. * : Étudier et tracer dans trois repères distincts mais ayant un axe des ordonnées commun (unité : 5cm) les fonctions f, g, h :
$f : x \mapsto \ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right| = \ln|x+1| - \ln|x|$
$g : x \mapsto xf(x)$
$h : x \mapsto x^2 f(x)$
    (a) on trouvera un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$;
    (b) on montrera que g et h sont prolongeables par continuité en 0, et on étudiera la dérivabilité en 0 de ces prolongements.
    (c) on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près du réel α, où g atteint son minimum, ainsi que de $g(\alpha)$.
    (d) on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près du réel β, où h atteint son maximum, ainsi que de $h(\beta)$.
    (e) on étudiera les branches infinies de la courbe de h en particulier.
13. * :
    (a) Étudier la fonction $f : x \mapsto \left|1+\dfrac{1}{x}\right|^x$ (on étudiera avec soin la fonction au voisinage de 0 et la concavité entre -1 et 0)
    (b) Étudier la fonction $g : x \mapsto \left|1-\dfrac{1}{x}\right|^x$
    - Trouver une relation entre f et g permettant d'utiliser les résultats du a.
    - Montrer que $g(1+u) \sim |u|$ quand $u \to 0$ et en déduire l'étude de g au voisinage de 1.
14. * : On définit la famille de fonctions f_λ par : $f_\lambda : x \mapsto x^{\left(x^\lambda\right)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (a) Étudier f_λ au voisinage de 0.
    (b) Étudier la position relative des diverses courbes.
    (c) Déterminer le lieu des points à tangente horizontale quand λ varie (étudier la courbe ainsi décrite).
    (d) Faire une figure avec une courbe représentative de chaque cas particulier et le lieu précédent.
    (e) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} f_\lambda\left(1 - \frac{1}{|\lambda|}\right)$ et $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} f_\lambda\left(1 - \frac{1}{\ln|\lambda|}\right)$.
15. * : Soit $f_m : x \mapsto (m-1)x^3 + x^2 - m$. On appelle $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.
    (a) Déterminer les points communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$.
    (b) Étudier f_m.
    (c) Déteriner l'équation diffrentielle dont les f_m sont les solutions.
    (d) Déterminer le lieu $\mathcal{H}$ des points à tangente horizontale des diverses courbes $\mathcal{C}_m$, ainsi que le lieu $\mathcal{I}$ des points d'inflexion.
    (e) Tracer dans un même repère $\mathcal{C}_0$,$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$,$\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$.
16. * : Démontrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $1 + x + x^2 + ... + x^{2n}$ reste toujours $\geqslant \lambda$ (pour tout x réel et n entier naturel).
17. * : Démonstration de la loi de Descartes, à partir du principe de Fermat, énonçant que la lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale.
    (a) Le plan, est rapporté à un repère Oxy ; la vitesse de la lumière est égale à v_1 dans le 1/2 plan $y > 0$, et à v_2 dans le plan $y < 0$; on donne les points $A(0, h_1)$, $B(L, -h_2)$ et $M(x, 0)$ $(h_1, h_2 > 0)$; un rayon lumineux met un temps T pour suivre le trajet AMB. On appelle f la fonction qui à x fait correspondre T.
    (b) Calculer $T = f(x)$ en fonction de x, L, h_1, h_2, v_1, v_2.
    (c) Etudier f et montrer que f est minimale en x_0 vérifiant $\dfrac{x_0}{AM.v_1} = \dfrac{L - x_0}{BM.v_2}$.
    (d) En déduire la loi de Descartes.
    REM : cette démonstration a été faite par Maupertuis en 1744.