

## FONCTIONS CIRCULAIRES

1. : Mettre sous forme de produits (ou quotients) :

- (a)  $\tan x + \cot x$
- (b)  $\cot x - \tan x$
- (c)  $\tan x + \tan 3x$
- (d)  $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$
- (e)  $\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{2} \sin 2x - \sin x$

2. : Montrer que  $||\sin x| - |\sin y|| \leq |\sin(x+y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$ .

3. :
- (a) Résoudre l'équation  $\cos 2x = \cos 3x$  ; présenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
  - (b) Résoudre de nouveau cette équation en exprimant  $\cos 2x$  et  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$  ; en déduire les valeurs de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{4\pi}{5}$  et  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

4. : Calculer  $\cos \frac{\pi}{5}$  en partant de la relation  $\cos 3\frac{\pi}{5} = -\cos 2\frac{\pi}{5}$ .

5. : Donner, sans faire de calculs, l'allure de la courbe de la fonction  $t \mapsto \sin 8t \sin t$ .

6. :
- (a) Calculer la somme :  $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(\theta + k\varphi)$  en multipliant cette expression par  $\sin \frac{\varphi}{2}$  et en linéarisant.  
Réponse :  $C_n = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi}{2}} \cos\left(\theta + n\frac{\varphi}{2}\right)$  lorsque  $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$  ; regarder aussi le cas  $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$ .

- (b) Calculer aussi la somme :  $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(\theta + k\varphi)$ .

7. : On suppose connues les formules de  $C_n$  et  $S_n$  du 6.

- (a) En déduire :  $\frac{\sum_{k=0}^n \sin((2k+1)x)}{\sum_{k=0}^n \cos((2k+1)x)}$  (cf. 1. (d)).
- (b) Calculer  $\sum_{k=1}^p (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2p+1}$  [Rep : 1/2 ; linéariser].

8. :  $A, B, C$  sont les mesures prises dans  $]0, \pi[$  des angles non orientés d'un triangle.

- (a) Prouver l'égalité : 
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$
- (b) En déduire que l'aire d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon 1 est égale au double du produit des sinus de ses angles.
- (c) Prouver le joli résultat suivant :  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ .

9. :
- (a) Vérifier que  $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$  (valable pour  $x \in ?$ ).
  - (b) On pose pour  $x$  réel et  $n$  entier  $\geq 1$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$  ;
    - i. Calculer  $S_n(x)$  pour  $x \neq 0$  en utilisant (a).

ii. Montrer que pour  $x \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{x} - \cot x$ .

10. :

- (a) Appliquer la formule de factorisation de  $\cos p + \cos q$  à  $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ .  
 (b) En déduire par récurrence double sur  $n$  que  $\cos n\theta$  s'exprime toujours fonction de  $\cos\theta$ .  
 (c) Montrer similairement que  $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$  s'exprime toujours fonction de  $\cos\theta$ .

11. \* :

- (a) Calculer le produit :  $\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 89^\circ$ .  
 (b) Linéariser  $\sin x \sin(90^\circ - x)$  et  $\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x)$ .  
 En déduire par exemple  $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$ .  
 Remarque : aucun des facteurs de ce produit n'est pourtant exprimable à l'aide de radicaux.  
 (c) On considère le produit  $p = \prod_{i=1}^{90} \sin i^\circ = \sin 1^\circ \times \sin 2^\circ \times \dots \times \sin 90^\circ$ .  
 i. Montrer que  $p = 2^{-44,5} \times \sin 2^\circ \times \sin 4^\circ \times \dots \times \sin 90^\circ$ . Que peut-on en déduire ?  
 ii. Montrer que  $p = 2^{-66,5} \times \sin 4^\circ \times \sin 8^\circ \times \dots \times \sin 88^\circ$ .  
 iii. Montrer que  $p = 2^{-80,5} \times (\sin 12^\circ \times \sin 24^\circ \times \dots \times \sin 84^\circ) \times \sin 60^\circ$ .  
 iv. En déduire finalement le calcul de  $p$ .

12. \* : Un problème d'extrémum posé par Galilée.

Un point  $A$  est distant d'un plan vertical  $P$  d'une distance  $d$ . Quelle inclinaison doit avoir un plan  $Q$  passant par  $A$  de sorte qu'une bille partant de  $A$  et roulant sur  $Q$  atteigne le plan  $P$  en un temps minimum ? Donner ce temps en fonction des données.

## FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES

13. : Définir la fonction  $\operatorname{arccot}$ , réciproque de  $\cot$  sur  $]0, \pi[$ . Calculer sa dérivée, tracer sa courbe.

Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R} \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ .

14. : Tracer les courbes des fonctions suivantes  $f, g, h, k, l, m$  suivantes :

- (a)  $f(x) = \cos(\arccos x)$  et  $g(x) = \arccos(\cos x)$  (indication :  $g(x+2\pi) = \dots, g(-x) = \dots$ )  
 (b)  $h(x) = \sin(\arcsin x)$  et  $k(x) = \arcsin(\sin x)$  (indication :  $k(x+\pi) = \dots$ )  
 (c)  $l(x) = \tan(\arctan x)$  et  $m(x) = \arctan(\tan x)$

15. : Démontrer les identités suivantes :

- (a) Pour tout  $x \in [-1, 1]$  :  
 i.  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$  et  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$   
 ii.  $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  pour  $|x| \neq 1$ .  
 (b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  
 i.  $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

16. : Déterminer l'ensemble de définition, puis simplifier les expressions suivantes :

- (a)  $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$   
 i. méthode 1 : poser  $\theta = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$  et exprimer  $x$  en fonction de  $\theta$ , simplifier, puis exprimer de nouveau  $\theta$  en fonction de  $x$  ;

ii. méthode 2 : remarquer que  $\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$  et donc poser  $\theta = \dots$  de sorte que  $x = \tan^2 \frac{\theta}{2}$  ;

iii. méthode 3 : calculer  $f'(x)$  et en déduire  $f(x)$ .

(b)  $f(x) = \arctan \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$  (indication pour la méthode 2 :  $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \dots$ )

(c)  $f(x) = \arctan \left( \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right)$  (indication pour la méthode 2 :  $\tan \theta - \cot \theta = \dots$ )

(d)  $f(x) = \arctan (\sqrt{1+x^2} - x)$  (indication pour la méthode 2 :  $1 + \tan^2 \theta = \dots$ )

(e)  $f(x) = \arcsin \left( \frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}} \right)$

17. : On donne deux entiers  $p$  et  $q$  vérifiant :  $0 < p < q$ .

(a) Calculer  $\arctan \frac{p}{q} + \arctan \frac{q-p}{q+p}$ .

(b) Calculer  $4 \arctan \frac{1}{5}$  et à l'aide de la question précédente en déduire la formule de Machin (John Machin, 1680-1751) :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

## FONCTIONS LOGARITHMES, EXPONENTIELLES, PUISSANCES

18. : Montrer les petites formules :

(a)  $a^{\ln b} = b^{\ln a}$  et plus généralement :  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ .

(b)  $\log_x 10 = \frac{1}{\log x}$  et plus généralement  $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ .

19. :

(a) Trouver une formule donnant le nombre de chiffres d'un entier strictement positif  $N$  en écriture décimale (ou le nombre de chiffres avant la virgule d'un réel  $> 0$ ).

(b) Appliquer cette formule à  $2^{43 \cdot 112 \cdot 609} - 1$ ; ce nombre est un nombre premier de Mersenne, le plus grand nombre premier actuellement connu (découvert en août 2008).

Rep : 12 978 189 chiffres.

(c) Appliquer également à  $e^{e^{e^e}}$  et à  $500!$ .

Rep : 1 656 521 et 1135.

20. :

(a) Avec un taux d'inflation de 2% par an, au bout de combien d'années les prix auront-ils doublés ?

(b) Les prix ont doublé depuis 12 ans. Quel est le taux d'inflation moyen annuel ?

(c) Trouver un parallèle entre le résultat du b) et la définition des  $\frac{1}{2}$  tons en musique (il y en a 12 dans une octave, et dans une octave, la fréquence est multipliée par 2).

solution (erronée) par proportionnalité	$\frac{100}{12} \% \approx 8,3\%$
solution exacte	$100 \left( \sqrt[12]{2} - 1 \right) \% \approx 5,9\%$

21. \* :

(a) En posant  $y = tx$ , déterminer une paramétrisation de l'ensemble  $E = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 / x^y = y^x \right\}$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = t\varphi(t) \end{array} \right.$$

- (b) Tracer  $E$  à l'aide de la machine.  
 (c) Déterminer les points  $(x, y)$  de  $E$  tels que  $x \neq y$  et  $x, y \in \mathbb{N}$ .  
 (d) Hachurer sur la figure l'ensemble  $F = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 / x^y > y^x \right\}$ .

22. :

- (a) Montrer pour tout  $x > 0$  :  $\frac{1}{x+1} \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \leq \frac{1}{x}$ .  
 (b) En déduire que pour tout  $x > 0$  :  $\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \leq e \leq \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x+1}$ .  
 (c) En déduire, en effectuant un produit d'inégalités du b) que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

### FONCTIONS HYPERBOLIQUES

23. : Montrer que si  $e^z = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$ , alors  $\operatorname{th} \frac{z}{2} = \tan x \tan y$  et  $\operatorname{coth} z = \frac{1}{2} (\tan x \tan y + \cot x \cot y)$ .

24. : Montrer que si  $AB > 0$  alors il existe  $a, b$  tels que  $Ae^x + Be^{-x} = a \operatorname{ch}(x+b)$  et que si  $AB < 0$  alors il existe  $a, b$  tels que  $Ae^x + Be^{-x} = a \operatorname{sh}(x+b)$ .

25. : On pose

- $C_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a+kb)$
- $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a+kb)$ .

Calculer  $C_n + S_n$ ; en déduire sans calcul  $C_n - S_n$ , puis  $C_n$  et  $S_n$ .

On trouve, si  $b \neq 0$  :  $C_n + S_n = \frac{\operatorname{sh} \left( (n+1) \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}} e^{a+n\frac{b}{2}}$ .

26. :

- (a) On pose  $p_n(x) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \frac{x}{2^k}$ ; calculer  $p_n(x)$  pour  $x \neq 0$  en le multipliant par  $\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}$ .  
 (b) On pose  $p(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x)$ ; déterminer  $p(x)$  pour  $x \neq 0$ ; vérifier que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} p(x) = p(0)$ .  
 (c) On pose  $u_n = \frac{1}{2^n} \prod_{k=0}^n \left( \operatorname{ch} \frac{x}{2^k} + \operatorname{ch} \frac{y}{2^k} \right)$ ; montrer que  $u_n = 2p_{n+1}(x+y)p_{n+1}(x-y)$ ; en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

27. \* :

- (a) Discuter suivant la valeur du paramètre  $\lambda$ , le nombre de solutions de l'équation  $\operatorname{ch} x = \lambda x$ , et donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de la valeur critique de  $\lambda$ .  
 (b) On appelle chaînette d'axe  $(Ox)$  toute courbe d'équation  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ , avec  $a > 0$ . Par quelle transformation géométrique passe-t-on d'une chaînette à une autre ?  
 (c) Etant donnés les points  $A \left| \begin{array}{c} r \\ R \end{array} \right.$  et  $A' \left| \begin{array}{c} -r \\ R \end{array} \right.$  avec  $r, R > 0$ , déterminer une condition pour qu'il passe une chaînette par  $A$  et  $A'$ .

### FONCTIONS HYPERBOLIQUES RÉCIPROQUES

28. : Tracer les courbes de :

(a)  $x \mapsto \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x)$  et  $x \mapsto \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x)$

(b)  $x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)$  et  $x \mapsto \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x)$

(c)  $x \mapsto \operatorname{th}(\operatorname{argth} x)$  et  $x \mapsto \operatorname{argth}(\operatorname{th} x)$

29. :

(a) Prouver pour tout  $x \in [1, +\infty[$  :  $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$  et  $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ .

(b) Prouver pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + x^2}$  et  $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ .

(c) Prouver pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :  $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$  et  $\operatorname{sh}(\operatorname{argth} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

30. \* :

(a) Vérifier pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \ln \left( \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \ln \left( \tan x + \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \operatorname{argsh}(\tan x) = \operatorname{signe}(x) \times \operatorname{argch} \left( \frac{1}{\cos x} \right) = \operatorname{argth}(\sin x) = 2 \operatorname{argth} \left( \tan \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

La fonction qui à  $x$  associe ces expressions s'appelle fonction de Gudermann inverse et on la note  $\operatorname{gd}^{-1}$ .

(b) Calculer  $(\operatorname{gd}^{-1})'(x)$  ; tracer la courbe de  $\operatorname{gd}^{-1}$ .

*Remarque : cette fonction intervient en cartographie de la façon suivante : dans la projection de Mercator, on*

*pose :* 
$$\begin{pmatrix} x = \text{longitude} \\ y = \operatorname{gd}^{-1}(\text{latitude}) \end{pmatrix}.$$

(c) Après en avoir justifié son existence, donner l'ensemble de définition de la réciproque  $\operatorname{gd}$  de  $\operatorname{gd}^{-1}$  ; en calculer la dérivée.

Vérifier :  $\operatorname{gd}(x) = 2 \arctan e^x - \frac{\pi}{2} = \arctan(\operatorname{sh} x) = \operatorname{signe}(x) \times \arccos \left( \frac{1}{\operatorname{ch} x} \right) = \arcsin(\operatorname{th} x) = 2 \arctan \left( \operatorname{th} \frac{x}{2} \right).$