

## I SYSTEMES LINÉAIRES

1. Donner un exemple de système de 3 équations à 5 inconnues d'indétermination 3 et compatible ; le résoudre.

2. : Résoudre et discuter le système paramétrique : 
$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

3. :

(a) Résoudre et discuter le système paramétrique :

$$\begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + ay + z = \beta \\ x + y + az = \gamma \end{cases}$$

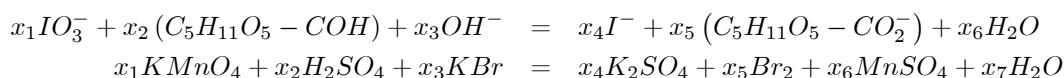
Remarque : une méthode possible consiste à introduire l'inconnue auxiliaire  $t = x + y + z$ .

(b) \* Généraliser au système 
$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket & ax_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} x_j = \alpha_i \end{cases}$$

4. : Trouver une fonction polynomiale impaire dont la courbe représentative passe par les points  $(1, 1)$  et  $(2, 0)$ , et possède une tangente horizontale en  $(1, 1)$ . Etudier cette fonction et tracer sa courbe.

Rep :  $f(x) = \frac{28x - 11x^3 + x^5}{18}$ .

5. : Équilibrer les réactions chimiques :



Rep 1 : 1, 3, 3, 1, 3, 3 ; Rep 2 : 2, 8, 10, 6, 5, 2, 8.

6. :

(a) Montrer que dans tout triangle  $ABC$ , on a :

$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = c \cos A + a \cos C \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

(b) Dans cette question, on considère que les inconnues du système ci-dessus sont  $\cos A, \cos B, \cos C$ . *A priori*, le système est-il déterminé ou indéterminé ? Le résoudre.

(c) Maintenant les inconnues sont  $a, b, c$ . Quel est *a priori* l'ordre de l'indétermination ? Résoudre le système.

7. \* : Rectangles de carrés

(a)

Déterminer les dimensions de ce rectangle, sachant que, contrairement aux apparences, il n'est formé que de carrés, et que le plus petit carré est un carré de côté 1 ; reproduire la figure exacte.

(b) Idem pour ce rectangle, où le plus petit carré est de côté 3.

## II POINTS ET DROITES, VECTEURS ET BARYCENTRES.

### 8. : Théorème de Desargues

On donne deux triangles  $(ABC)$  et  $(A'B'C')$  non parallèles, tels que les côtés correspondants  $(AB)$  et  $(A'B')$ ,  $(BC)$  et  $(B'C')$ ,  $(CA)$  et  $(C'A')$  sont deux à deux non parallèles.

- (a) Montrer que si les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$ ,  $(CC')$  sont concourantes (en  $O$ ), alors les paires de droites  $(AB)$  et  $(A'B')$ ,  $(BC)$  et  $(B'C')$ ,  $(CA)$  et  $(C'A')$  sont des paires de droites sécantes (en  $C_1, A_1, B_1$  respectivement).
- (b) Que dire des points  $A_1, B_1$ , et  $C_1$  ?

9. : Deux charges positives  $q_1$  et  $q_2$  sont fixées aux points  $A_1$  et  $A_2$  ; une autre charge est en équilibre en un point  $M$  (compte tenu de l'interaction électromagnétique). On demande d'exprimer  $M$  comme barycentre de  $A_1$  et  $A_2$  (avec des coefficients ne faisant pas intervenir le point  $M$ ); faire une figure avec  $q_1 = 2q_2$ .

10. : Soit  $ABC$  un triangle non aplati. On note  $A_1 = \text{Bar} \begin{pmatrix} B & C \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B_1 = \text{Bar} \begin{pmatrix} A & C \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Soit  $G$  le point d'intersection de  $(AA_1)$  avec  $(BB_1)$ .

- (a) Déterminer des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $G = \text{Bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ .
- (b) Soit  $C_1$  le point d'intersection de  $(CG)$  avec  $(AB)$ . Exprimer  $C_1$  comme barycentre de  $A$  et  $B$ .

11. : On donne  $D = \text{Bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ ,  $A = \text{Bar} \begin{pmatrix} B & C & D \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ ,  $B = \text{Bar} \begin{pmatrix} C & D & A \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$

et  $C = \text{Bar}((D, \alpha), (A, \beta), (C, \gamma))$  ; enfin on suppose  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BD}$  non colinéaires. Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.

12. \* :

- (a) Résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\alpha_1 \\ x_2 + x_3 = 2\alpha_{21} \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2\alpha_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2\alpha_n \end{cases}$$

- (b) En déduire le résultat géométrique suivant :

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  points fixes. Soit  $M_1$  un point variable,  $M_2$  son symétrique par rapport à  $A_1$ ,  $M_3$  le symétrique de  $M_2$  par rapport à  $A_2$  etc...  $M_{n+1}$  le symétrique de  $M_n$  par rapport à  $A_n$ . On souhaite que  $M_{n+1}$  soit égal à  $M_1$ .

Montrer que

- si  $n$  est pair, ceci n'est possible que si la condition  $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{0}$  est réalisée, et alors tout point  $M_1$  convient.
- si  $n$  est impair, il n'y a pas de condition sur les  $A_i$ , mais il y a un unique point  $M_1$  qui convient.

13. \* : Coordonnées cartésiennes et coordonnées barycentriques.

Soit  $ABC$  un triangle non aplati d'un plan  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{E}_3$  ne contenant pas  $O$ , lui-même rapporté au repère cartésien  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  avec  $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$  et  $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$ .

(a) Vérifier que les coordonnées cartésiennes  $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$  d'un point  $M$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{R}$  sont égales aux coordonnées barycentriques normalisées (c'est-à-dire de somme 1) de  $M$  dans  $(A, B, C)$  (i.e.  $M = \text{bar} \begin{pmatrix} A & B & C \\ x & y & z \end{pmatrix}$ )

(b) Quels sont les sous-ensembles de  $\mathcal{P}$  d'équation barycentrique :

- $x = 0$
- $x = y$
- $x = -y$
- $x = y = z$  ?

(c) Soit  $\mathcal{A}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  d'équation barycentrique  $f(x, y, z) = 0$  et  $\mathcal{B}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{E}_3$  d'équation cartésienne  $f(x, y, z) = 0$ . Comment obtient-on  $\mathcal{A}$  connaissant  $\mathcal{B}$  ?

(d) On suppose  $\mathcal{R}$  orthonormé.

i. Montrer que  $ABC$  est équilatéral.

ii. Quel est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  d'équation barycentrique :  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ?

### III) GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (i.e. avec utilisation des coordonnées).

1)  $\mathbb{E}_3$  est supposé rapporté à un repère quelconque.

14. :

(a) Que dire des plans  $P : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$  et  $Q : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = 3 + 3\lambda + \mu \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$  ?

(b) Donner un point et un vecteur directeur de l'intersection des plans  $P : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$  et  $R : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ .

15. : Déterminer  $a$  pour que les droites  $D$  dirigée par  $\vec{u}(1, -1, 0)$  passant par  $A(a, 1, 0)$  et  $E$  dirigée par  $\vec{v}(1, 1, 1)$  passant par  $B(1, 1, a)$  soient sécantes ; donner alors les coordonnées du point d'intersection.

16. : Déterminer l'équation du plan  $P$  passant par  $A(0, 1, -2)$  et  $B(-1, 2, 3)$  et parallèle à la droite  $D \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$ .

Rep :  $13x - 2y + 3z = -8$ .

17. :  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux droites non coplanaires de  $\mathbb{E}_3$ .

(a) Démontrer qu'il existe un unique couple de plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  parallèles contenant respectivement  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

A. N. :

$$\mathcal{D}_1 \begin{vmatrix} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{vmatrix} ; \mathcal{D}_2 \begin{vmatrix} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{vmatrix}$$

Déterminer les équations cartésiennes de  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

(b) Démontrer que si  $A$  est un point n'appartenant ni à  $\mathcal{P}_1$  ni à  $\mathcal{P}_2$ , il existe une unique droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  et rencontrant  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . Quel est donc l'ensemble réunion des droites rencontrant  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ?

A. N. :  $A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$  ; donner un système d'équations cartésienne de  $\mathcal{D}$  et les coordonnées des points  $B_1$  et  $B_2$  tels que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \{B_1\}$  et  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2 = \{B_2\}$ .

- (c) Démontrer que si  $\vec{u}$  est un vecteur non parallèle à  $\mathcal{P}_1$ , il existe une unique droite  $\mathcal{E}$  dirigée par  $\vec{u}$  et rencontrant  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

A. N. :  $\vec{u} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$  ; donner un système d'équations cartésienne de  $\mathcal{E}$  et les coordonnées des points  $C_1$  et  $C_2$  tels que  $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_1 = \{C_1\}$  et  $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_2 = \{C_2\}$ .

Rép :  $\mathcal{P}_1 : x - y + z = 0$  ;  $\mathcal{P}_2 : x - y + z = 1$  ;  $\mathcal{D} : y = z = 1$  ;  $B_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$  ;  $B_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$  ;  $\mathcal{E} : x = y = 1$  ;  $C_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  ;  $C_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ .

18. : Une droite de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$  rencontre la droite  $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$  en  $A$  et la droite  $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$  en  $B$  ; déterminer  $A$  et  $B$ .

19. \* : On donne les droites :  $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} y = x - 2 \\ z = 1 \end{cases}$ ,  $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 0 \end{cases}$ ,  $\mathcal{D}_3 : \begin{cases} y = -x + 1 \\ z = -1 \end{cases}$ .

- (a) A quel plan sont elles parallèles ?  
 (b) Démontrer que les droites qui rencontrent ces 3 droites restent parallèles à un plan  $\mathcal{P}$  passant par  $O$ .  
 (c) Démontrer que si  $\mathcal{Q}$  est un plan non parallèle à  $\mathcal{P}$ , il existe une unique droite rencontrant  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  et parallèle à  $\mathcal{Q}$ .

A. N. :  $\mathcal{Q} : 2x + 4y - 3z = 0$ .

Rep :  $\begin{cases} x = 16\lambda + \frac{1}{4} \\ y = -5\lambda + \frac{7}{2} \\ z = 4\lambda \end{cases}$ .

2)  $\mathbb{E}_3$  est maintenant supposé rapporté à un repère *orthonormé direct*.

20. : Formule pour l'intersection d'un plan et d'une droite.

- (a) On donne un plan  $P$  passant par  $A$  de vecteur normal  $\vec{n}$ , et une droite  $D$  non parallèle à  $P$  passant par  $B$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  ; montrer que le point d'intersection  $X$  de  $P$  avec  $D$  est donné par la formule :

$$X = B + \frac{\overrightarrow{AB} \vec{n}}{\overrightarrow{u} \vec{n}} \vec{u}$$

A. N. :  $P : x + y + 3z = 1$ ,  $B(1, 1, 1)$  ; déterminer  $X$ .

- (b) En déduire une formule pour le projeté orthogonal  $H$  de  $B$  sur  $P$  et une autre pour le symétrique  $B'$  de  $B$  par rapport à  $P$ . Déterminer  $H$  et  $B'$  pour l'A. N. de a) .

21. Refaire le 14. en utilisant le produit vectoriel.

22. : Refaire le 15. en utilisant la formule de distance entre deux droites.

23. : Refaire le 16. en utilisant le produit vectoriel.

24. : Refaire les applications numériques du 17. en utilisant le produit vectoriel.

25. : La perpendiculaire commune à deux droites :

- (a) Etant donné deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  non parallèles de l'espace, démontrer qu'il existe une unique droite  $\mathcal{D}$  perpendiculaire à ces deux droites (appelée la *perpendiculaire commune*) (ceci peut se déduire de 17) c)) ; vérifier que  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire aux deux plans parallèles  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  contenant respectivement  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ;

- (b) A.N. avec les données du 17. : déterminer les deux points d'intersection de la perpendiculaire commune avec  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

Réponse :  $(2/3, 1, 1/3)$ ,  $(1, 2/3, 2/3)$

26. : On se donne 5 points non coplanaires  $A, B, C, D, E$  tels que  $A, B, C$  et  $A, D, E$  soient non alignés.

- (a) Donner un vecteur directeur de  $(ABC) \cap (ADE)$ .  
 (b) A.N. :  $A(1, 2, -1), B(3, 2, 0), C(2, 1, -1), D(1, 0, 4), E(-1, 1, 1)$ .

Rep :  $(24, -2, 11)$ .

27. : On donne  $A(1, 1, 1), B(1, -1, -1), C(-1, 1, -1), D(-1, -1, 1)$ .

- (a) Montrer que les arêtes du tétraèdre  $(ABCD)$  sont les diagonales des faces d'un cube ( $C$ ) dont on donnera les sommets (figure) ; que peut-on dire du tétraèdre  $(ABCD)$  ?  
 (b) Déterminer les équations de ses 4 faces.  
 (c) Que dire du tétraèdre  $(A'B'C'D')$  formé des autres sommets du cube ( $C$ ) par rapport à  $(ABCD)$  ? La figure formée par ces deux tétraèdres est appelée, depuis Képler, "stella octangula".

28. : Calculer la distance du point  $A$  d'intersection de la droite  $D : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$  avec le plan  $P : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$  au

$$\text{plan } Q : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = -3 + 4\mu \end{cases}$$

Rep :  $2/3$ .

#### IV) PRODUIT SCALAIRE, DETERMINANT, PRODUITS VECTORIEL ET MIXTE.

Note : le produit mixte est indifféremment noté  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  ou  $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

29. :

- (a) Montrer la relation d'Euler :  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$   
 (b) En déduire que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes.

30. : La droite d'Euler.

- (a) Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $(ABC)$  et  $H = O + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  ; montrer que  $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ .  
 (b) Quel est le point  $H$  ?  
 (c) En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont alignés (sur la droite dite "d'Euler").

31. :

- (a) : Montrer à l'aide du déterminant que le centre de gravité du triangle divise le triangle en 3 triangles de même aire.  
 (b) \* : Montrer que c'est le seul point intérieur au triangle (supposé non aplati) à avoir cette propriété.

32. : On construit les symétriques respectifs  $A', B', C'$  des points  $A, B, C$  par rapport à  $B, C, A$  ; quel est le rapport entre l'aire de  $A'B'C'$  et celle de  $ABC$  ?

33. :

- (a) Montrer la relation :

$$\vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} + \vec{MC} \wedge \vec{MA} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

- (b) Pourquoi a-t-on exactement la même relation en remplaçant le produit vectoriel par le déterminant dans le plan ?

34. :

- (a) Calculer  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$  (identité de Jacobi).  
 (b) À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$  ?

35. La division vectorielle : étant donnés deux vecteurs non nuls  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , on cherche les vecteurs  $\vec{x}$  tels que  $\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{x}$ .

(a) A quelle condition nécessaire existe-t-il une solution ?

(b) Montrer que si cette condition est réalisée, il existe un unique vecteur  $\vec{x}$  solution orthogonal à  $\vec{b}$  :  $\vec{x}_0 = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$ .

(c) Déterminer alors toutes les solutions.

36. : Montrer la relation :

$$\det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u}) = \det^2(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Qu'en déduit-on ?

37. : Montrer que  $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$  et étudier le cas d'égalité.

38. :

(a) Développer l'expression :  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})$  de deux manières différentes ; en déduire la valeur de  $[\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{a} - [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] \vec{b} + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \vec{c}$ .

(b) Déterminer à quelle CNS  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{0}$ .

39. :

(a) On considère un parallélépipède  $(ABCDEFGH)$  ( $(ABCD)$  est un parallélogramme et  $(EFGH)$  en est un translate) ; Montrer que le volume de la pyramide  $(ABCDE)$  est  $\frac{1}{3} |\det(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})|$  et le volume du tétraèdre  $(ABDE)$ ,  $\frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})|$ .

(b) \* : Montrer que le centre de gravité du tétraèdre divise le tétraèdre en 4 tétraèdres de même volume.

(c) \* : Montrer que c'est le seul à avoir cette propriété.

40. : Un théorème de Pythagore dans l'espace.

Soit  $(OABC)$  un tétraèdre trirectangle en  $O$  ; montrer que le carré de l'aire de la face  $(ABC)$  est égal à la somme des carrés des aires des autres faces.

41. : Soient dans l'espace trois droites distinctes  $(D), (E), (F)$  passant par des points  $A, B, C$  et dirigées par des vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  de somme nulle. Montrer que les trois droites sont concourantes ssi pour tout point  $M$   $\vec{AM} \wedge \vec{u} + \vec{BM} \wedge \vec{v} + \vec{CM} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ .

42. \* : Détermination des pieds de la perpendiculaire commune.

soient  $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$  et  $\mathcal{E} = (B, \vec{v})$  deux droites non parallèles ; montrer que le point d'intersection de la perpendiculaire

commune à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{E}$  avec  $\mathcal{D}$  est  $H = A + \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v})(\vec{AB} \wedge \vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2} \vec{u}$ .

Indication : écrire  $\vec{AB} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$  où  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  (justifier) et calculer  $\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w})$ .

43. \* : Détermination d'un point de l'intersection de deux plans.

Soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux plans sécants en une droite  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{P}$  étant défini par un point  $A$  et un vecteur normal  $\vec{u}$ ,  $\mathcal{Q}$  par  $B$  et  $\vec{v}$ . Soit  $I$  le milieu de  $(AB)$ ,  $\vec{w} = \vec{IA}$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $I$  sur  $\mathcal{D}$ . Montrer que

$$\vec{IH} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

avec

$$x = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{w}) \vec{v}^2 + (\vec{u} \wedge \vec{v})(\vec{u} \wedge \vec{w})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2}, y = -\frac{(\vec{u} \wedge \vec{w}) \vec{u}^2 + (\vec{u} \wedge \vec{v})(\vec{u} \wedge \vec{w})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2}$$

V) CERCLES ET SPHÈRES.

44. : Déterminer l'équation de la sphère passant par  $O, A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ . En déterminer le centre et le rayon et interpréter géométriquement.

45. : On donne  $(C_1) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 34 = 0 \end{cases}$  et  $(C_2) : \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 9z - 30 = 0 \end{cases}$

(a) Déterminer leurs centre et rayon, et leurs points d'intersection.

(b) Déterminer la sphère qui les contient.

$$\text{Rep} : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z - 30 = 0$$

46. : Quel est le lieu des projetés orthogonaux d'un point fixe  $O$  sur les plans passant par une droite fixe  $D$  ?

47. : Cercles d'Apollonius (géométrie plane).

(a) On se donne deux points pondérés  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  ; montrer que le lieu des point  $M$  vérifiant  $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = cte$  est soit vide, soit un cercle centré en  $G = bar((A, \alpha), (B, \beta))$ .

(b) On se donne deux points distincts  $A$  et  $B$  et  $k > 1$

i. Montrer que le lieu des points  $M$  vérifiant  $\frac{MA}{MB} = k$  est un cercle  $(C)$  dont on donnera le centre.

ii. Vérifier que  $(C)$  coupe la droite  $(AB)$  en deux points, l'un (disons  $I$ ) situé entre  $A$  et  $B$ , l'autre (disons  $J$ ) à l'extérieur ; montrer que si  $M$  appartient à  $(C)$ ,  $(MI)$  est la bissectrice intérieure de  $\widehat{AMB}$ , et  $(MJ)$  sa bissectrice extérieure.

48. \* : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Soit dans le plan  $P$  un cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

(a) Montrer que si  $[AA']$  est un diamètre de  $(C)$  le produit scalaire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$  est indépendant des points  $A$  et  $A'$  choisis, égal à  $OM^2 - R^2$  ; ce nombre est appelé "puissance de  $M$  par rapport à  $(C)$ " et noté  $\mathcal{P}_{(C)}(M)$ .

(b) Vérifier que si une droite passant par  $M$  coupe  $(C)$  en  $A$  et  $B$ ,  $\mathcal{P}_{(C)}(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .

(c) On considère dans le plan deux cercles  $(C)$  et  $(C')$  de centres respectifs  $\Omega$  et  $\Omega'$  et de rayons  $R$  et  $R'$  ; montrer que ces deux cercles sont orthogonaux (i.e. se coupent-ils avec des tangentes perpendiculaires) ssi  $\mathcal{P}_{(C')}(\Omega) = R^2$ .

(d) Montrer que tout ceci reste inchangé si on remplace le cercle  $(C)$  par une sphère  $(S)$  dans l'espace.

49. \* : Faisceaux de cercles.

(a) Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et on se fixe un réel  $\lambda$  ; pour tout réel  $t$ , on considère le cercle  $(C_t)$  de rayon  $\sqrt{t^2 + \lambda}$  de centre  $\Omega_t(t, 0)$  et on désigne par  $\mathcal{F}_\lambda$  l'ensemble des cercles  $(C_t)$  pour  $t^2 \geq -\lambda$ .

(b) Montrer que si  $\lambda > 0$ ,  $\mathcal{F}_\lambda$  est l'ensemble des cercles passant par deux point fixes  $A$  et  $B$  que l'on déterminera ( $\mathcal{F}_\lambda$  s'appelle le faisceau de cercles à *points de base*  $A$  et  $B$ ).

(c) Qu'est ce que  $\mathcal{F}_0$  ?  $\mathcal{F}_0$  est appelé faisceau *singulier*.

(d) Montrer que  $\mathcal{F}_\lambda$  est l'ensemble des cercles centrés sur  $Ox$  tels que la puissance de  $O$  par rapport à ces cercles soit égale à  $-\lambda$ .

(e) On suppose  $\lambda = -\mu < 0$  et on pose  $A'(-\sqrt{\mu}, 0)$  et  $B'(\sqrt{\mu}, 0)$  ; montrer que  $\mathcal{F}_\lambda$  est l'ensemble des cercles centrés sur  $Ox$  et orthogonaux au cercle de diamètre  $[A'B']$  ( $\mathcal{F}_\lambda$  s'appelle le faisceau de cercles à *points limites*  $A$  et  $B$ ) ; faire une figure avec quelques cercles du faisceau.