I SYSTÈMES LINÉAIRES

1. Donner un exemple de système de 3 équations à 5 inconnues d'indétermination 3 et compatible ; le résoudre.

2. : Résoudre et discuter le système paramétrique : $\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

3. :

   (a) Résoudre et discuter le système paramétrique :

   $$\begin{cases} ax+y+z=\alpha \\ x+ay+z=\beta \\ x+y+az=\gamma \end{cases}$$

   Remarque : une méthode possible consiste à introduire l'inconnue auxiliaire $t=x+y+z$.

   (b) * Généraliser au système $\left\{ \forall i \in [|1,n|] \quad ax_i + \sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} x_j = \alpha_i \right.$.

4. : Trouver une fonction polynomiale impaire dont la courbe représentative passe par les points $(1,1)$ et $(2,0)$, et possède une tangente horizontale en $(1,1)$. Etudier cette fonction et tracer sa courbe.

   Rep : $f(x) = \dfrac{28x - 11x^3 + x^5}{18}$.

5. : Équilibrer les réactions chimiques :

   $$\begin{aligned} x_1 IO_3^- + x_2 (C_5H_{11}O_5 - COH) + x_3 OH^- &= x_4 I^- + x_5 \left(C_5H_{11}O_5 - CO_2^-\right) + x_6 H_2O \\ x_1 KMnO_4 + x_2 H_2SO_4 + x_3 KBr &= x_4 K_2SO_4 + x_5 Br_2 + x_6 MnSO_4 + x_7 H_2O \end{aligned}$$

   Rep 1 : 1, 3, 3, 1, 3, 3 ; Rep 2 : 2, 8, 10, 6, 5, 2, 8.

6. * :

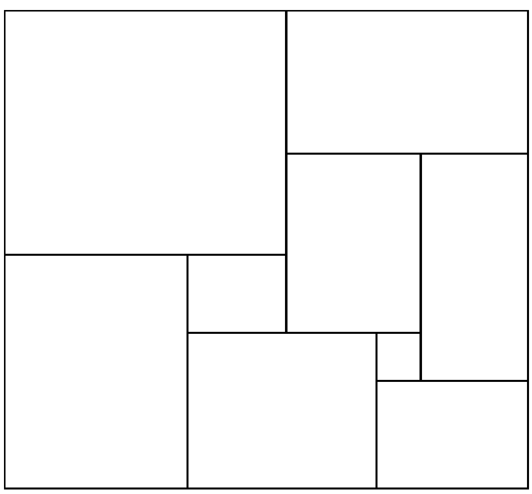
   (a) Montrer que dans tout triangle ABC, on a :

   $$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$$

   (b) Dans cette question, on considère que les inconnues du système ci-dessus sont $\cos A, \cos B, \cos C$. *A priori,* le système est-il déterminé ou indéterminé ? Le résoudre.

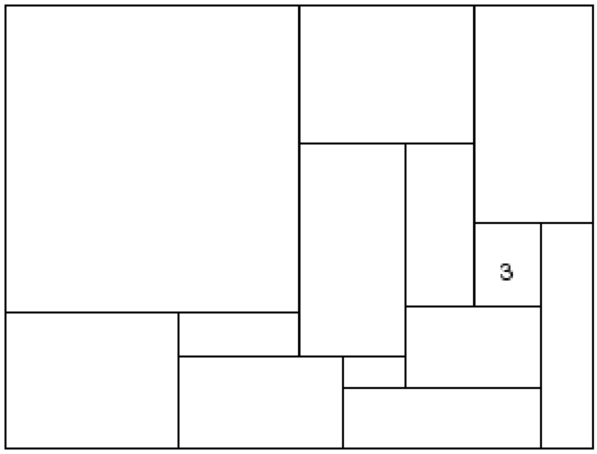
   (c) Maintenant les inconnues sont a, b, c. Quel est *a priori* l'ordre de l'indétermination ? Résoudre le système.

7. * : Rectangles de carrés

   (a) 

Déterminer les dimensions de ce rectangle, sachant que, contrairement aux apparences, il n'est formé que de carrés, et que le plus petit carré est un carré de côté 1 ; reproduire la figure exacte.

(b) Idem pour ce rectangle, où le plus petit carré est de côté 3.



II **POINTS ET VECTEURS**

8. * :

(a) Résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\alpha_1 \\ x_2 + x_3 = 2\alpha_{21} \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2\alpha_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2\alpha_n \end{cases}$$

(b) En déduire le résultat géométrique suivant :
Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ n points fixes. Soit M_1 un point variable, M_2 son symétrique par rapport à A_1, M_3 le symétrique de M_2 par rapport à A_2 etc... M_{n+1} le symétrique de M_n par rapport à A_n. On souhaite que M_{n+1} soit égal à M_1.
Montrer que

- si n est pair, ceci n'est possible que si la condition $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{0}$ est réalisée, et alors tout point M_1 convient.
- si n est impair, il n'y a pas de condition sur les A_i, mais il y a un unique point M_1 qui convient.

III) **DROITES ET PLANS.**

$\mathbb{E}_3$ est supposé rapporté à un repère quelconque.

9. :

(a) Que dire des plans $P : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$ et $Q : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = 3 + 3\lambda + \mu \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$?

(b) Donner un point et un vecteur directeur de l'intersection des plans $P : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$ et $R : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 3 + \lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

10. : Déterminer a pour que les droites D dirigée par $\overrightarrow{u}\,(1, -1, 0)$ passant par $A\,(a, 1, 0)$ et E dirigée par $\overrightarrow{v}\,(1, 1, 1)$ passant par $B\,(1, 1, a)$ soient sécantes ; donner alors les coordonnées du point d'intersection.

11. : Déterminer l'équation du plan P passant par $A\,(0, 1, -2)$ et $B\,(-1, 2, 3)$ et parallèle à la droite $D \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$.

Rep : $13x - 2y + 3z = -8$.

12. : $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites non coplanaires de $\mathbb{E}_3$.

(a) Démontrer qu'il existe un unique couple de plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ parallèles contenant respectivement $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
A. N. :
$$\mathcal{D}_1 \left| \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \end{array} \right. \quad ; \ \mathcal{D}_2 \left| \begin{array}{l} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{array} \right.$$
Déterminer les équations cartésiennes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

(b) Démontrer que si A est un point n'appartenant ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$, il existe une unique droite $\mathcal{D}$ passant par A et rencontrant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Quel est donc l'ensemble réunion des droites rencontrant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$?
A. N. : $A \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$; donner un système d'équations cartésienne de $\mathcal{D}$ et les coordonnées des points B_1 et B_2 tels que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \{B_1\}$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2 = \{B_2\}$.

(c) Démontrer que si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non parallèle à $\mathcal{P}_1$, il existe une unique droite $\mathcal{E}$ dirigée par $\overrightarrow{u}$ et rencontrant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
A. N. : $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right.$; donner un système d'équations cartésienne de $\mathcal{E}$ et les coordonnées des points C_1 et C_2 tels que $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_1 = \{C_1\}$ et $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_2 = \{C_2\}$.
Rép : $\mathcal{P}_1 : x-y+z=0$; $\mathcal{P}_2 : x-y+z=1$; $\mathcal{D} : y=z=1$; $B_1 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$; $B_2 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$; $\mathcal{E} : x=y=1$; $C_1 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right.$; $C_2 \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$.

13. : Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right.$ rencontre la droite $\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-\lambda \end{array} \right.$ en A et la droite $\mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=1 \\ z=1-\lambda \end{array} \right.$ en B ; déterminer A et B.

14. * : On donne les droites : $\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{l} y=x-2 \\ z=1 \end{array} \right.$, $\mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{l} y=2x+3 \\ z=0 \end{array} \right.$, $\mathcal{D}_3 : \left\{ \begin{array}{l} y=-x+1 \\ z=-1 \end{array} \right.$.

(a) A quel plan sont elles parallèles ?

(b) Démontrer que les droites qui rencontrent ces 3 droites restent parallèles à un plan $\mathcal{P}$ passant par O.

(c) Démontrer que si $\mathcal{Q}$ est un plan non parallèle à $\mathcal{P}$, il existe une unique droite rencontrant $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ et parallèle à $\mathcal{Q}$.
A. N. : $\mathcal{Q} : 2x+4y-3z=0$.

Rep : $\left\{ \begin{array}{l} x=16\lambda+\dfrac{1}{4} \\ y=-5\lambda+\dfrac{7}{2} \\ z=4\lambda \end{array} \right.$.

V) APPLICATIONS DU PLAN ET DE L'ESPACE.

15. : Le plan est rapporté au repère $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Donner les expressions analytiques de :

(a) La projection sur la droite $y=-2x+1$ parallèlement à $y=3x$.

(b) La symétrie par rapport à la droite $y=-2x+1$ parallèlement à $y=3x$.

(c) L'homothétie ou la translation qui envoie $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ sur $A' \left| \begin{array}{l} \alpha \\ 4 \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} 5 \\ 6 \end{array} \right.$ sur $B' \left| \begin{array}{l} 7 \\ 6 \end{array} \right.$ (on déterminera α).

Rep : a) $\begin{array}{ccc} 3/5 & -1/5 & 1/5 \\ -6/5 & 2/5 & 3/5 \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ -12/5 & -1/5 & 6/5 \end{array}$ c) $\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{array}$ $\alpha = 5$.

16. : L'espace est rapporté à $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Donner l'expression analytique dans $\mathcal{R}$ de :

(a) La projection sur le plan $x+y+z=1$, parallèlement à $\left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$.

(b) La projection sur la droite $\left|\begin{array}{l} x=\lambda+1 \\ y=2\lambda+1 \\ z=3\lambda-1 \end{array}\right.$ parallèlement à $x+y+z=0$.

(c) La symétrie par rapport à $x+y+z=1$ parallèlement à $\left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right.$.

(d) La symétrie par rapport à $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda+1 \\ y=2\lambda+1 \\ z=3\lambda-1 \end{array}\right.$ parallèlement à $x+y+z=0$.

rep: a) $\begin{array}{cccc} 5/6 & -1/6 & -1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}$ b) $\begin{array}{cccc} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 5/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \end{array}$ c) $\begin{array}{cccc} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$

17. : On donne ci-dessous les expressions analytiques d'une application f du plan ; on demande de déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'application f.

$$\mathbf{a} : \left\{\begin{array}{l} x'=x+1 \\ y'=y+3 \end{array}\right. ; \mathbf{b} : \left\{\begin{array}{l} x'=-2x+1 \\ y'=-2y+3 \end{array}\right. ; \mathbf{c} : \left\{\begin{array}{c} x'=x \\ y'=-y+3 \end{array}\right. ;$$
$$\mathbf{d} : \left\{\begin{array}{c} x'=x \\ y'=x+1 \end{array}\right. ; \mathbf{e} : \left\{\begin{array}{c} x'=x \\ y'=2x-y+2 \end{array}\right. ;$$

18. Mêmes questions que 17., mais dans l'espace :

$$\mathbf{a} : \left\{\begin{array}{l} x'=x+1 \\ y'=y+1 \\ z'=z+1 \end{array}\right. ; \mathbf{b} : \left\{\begin{array}{c} x'=x \\ y'=-y+1 \\ z'=-z+1 \end{array}\right. ; \mathbf{c} : \left\{\begin{array}{c} x'=x \\ y'=y \\ z'=-z+1 \end{array}\right. ;$$

19. * : Le plan est rapporté au repère $\mathcal{R}=\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

Démontrer que les courbes C_1 d'équation $y=\cos x$ et $C_2 : y=\cos^2 x$ sont homothétiques. On présentera la démonstration sous la forme : $M(x,y)\in C_2 \Leftrightarrow h(M)\in C_1$, où h est une homothétie dont on donnera les caractéristiques.

20. : Les dilatations (ou affinités).

Soient dans le plan D et D' deux droites sécantes ; la dilatation de base D, de direction D' et de rapport k est l'application qui à M fait correspondre M' défini par $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$, où I est le projeté de M sur D parallèlement à D'.

(a) Vérifier que les projections et symétries sont des dilatations particulières.

(b) Vérifier que si $k\neq 1$, $\overrightarrow{OI}=\dfrac{k\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM'}}{k-1}$.

(c) Donner l'expression analytique de la dilatation de base $y=-2x+1$, de direction $y=3x$ et de rapport 2.

(d) Donner l'expression analytique de la composée de la dilatation de base (Oy) de direction (Ox) de rapport k_1, avec la dilatation de base (Ox) de direction (Oy) et de rapport k_2.

(e) * Démontrer que faire subir à la courbe $y=e^x$ une translation de vecteur $\lambda\overrightarrow{i}$, revient à lui faire subir une dilatation.

(f) * Démontrer que faire subir à la parabole $y=x^2$ une dilatation de base (Oy) et de direction (Ox) revient à lui faire subir une homothétie, mais que en revanche, il n'en va pas de même pour la courbe $y=\operatorname{ch}x-1$ (qui ressemble pourtant à $y=x^2$).

21. :

(a) Soit dans l'espace, un point O d'une droite D ; on demande de déterminer les composées $S_D\circ S_O$ et $S_O\circ S_D$; en déduire qu'un objet borné ne peut avoir un axe et un centre de symétrie sans avoir aussi un plan de symétrie.

(b) Soit dans l'espace, un point O d'une plan P ; on demande de déterminer les composées $S_P\circ S_O$ et $S_O\circ S_P$; en déduire qu'un objet borné ne peut avoir un axe et un plan de symétrie sans avoir aussi un axe de symétrie.