1. : Calculer :

   (a) $I_1 = \displaystyle\iint_{0\leqslant x,y\leqslant 1} x^2y\,dxdy$

   (b) $I_2 = \displaystyle\iint_{0\leqslant x,y\leqslant 1} x^3e^{x^2y}dxdy$

   $\left[\text{Rep : } \dfrac{e}{2}-1\right]$

   (c) $I_3 = \displaystyle\iint_{x^2\leqslant y\leqslant x} (x+y)\,dxdy$ [Rep : 3/20]

   (d) $I_4 = \displaystyle\iint_{\substack{x+y\leqslant 1\\ x,y\geqslant 0}} \ln(1+x+y)\,dxdy$ [Rep: 1/4]

   (e) $I_5 =$ aire du domaine défini par $\sqrt{x}+\sqrt{y}\geqslant 1$ et $\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}\geqslant 1$. [Rep : 2/3]

   (f) $I_6 = \displaystyle\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}} y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ $\left[\text{d'abord en cartésiennes puis refaire le calcul en polaires ; Rep : } \dfrac{1}{2}\right]$

   (g) $I_7 = \displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x} \left(x^2+y^2+1\right)dxdy$ $\left[\text{passer en polaires ; Rep : } \dfrac{11\pi}{32}\right]$

   (h) $I_8 = \displaystyle\iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\\ x,y\geqslant 0}} xy\;dxdy$ $\left[\text{Rep : } \dfrac{a^2b^2}{8}\right]$.

2. : Partie symétrique et partie antisymétrique d'une fonction de deux variable.

   (a) Soit $f \in C\left([a,b]^2,\mathbb{R}\right)$; montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $(g,h) \in \left(C\left([a,b]^2,\mathbb{R}\right)\right)^2$ tel que $f = g+h$, avec g symétrique et h antisymétrique ($g(x,y) = g(y,x)$ et $h(x,y) = -h(y,x)$).

   (b) Montrer que
   $$\iint_{a\leqslant x,y\leqslant b} f(x,y)\,dxdy = \iint_{a\leqslant x,y\leqslant b} g(x,y)\,dxdy.$$

3. : Déterminer le centre d'inertie G d'un secteur de disque homogène d'angle au sommet α de rayon R et de centre O. Montrer que lorsque $\alpha \to 0$, $OG \to \dfrac{2}{3}R$; pourquoi ceci était-il prévisible ?

4. * : Aire enfermée par une courbe fermée.

   On considère une courbe fermée sans point double décrite par $M(t) = (f(t), g(t))$, tel que $M(0) = M(T)$; on souhaite déterminer l'aire S du domaine fermé D limité par la courbe.

   On suppose que l'application $\begin{cases} [0,T]\times[0,1] \longrightarrow D \\ (t,u) \longmapsto (uf(t), ug(t)) \end{cases}$ est surjective, et injective sur $]0,T[\times]0,1[$ (ce qui signifie que D est la réunion des segments qui joignent O à un point de la courbe).

   (a) Montrer par un changement de variable que $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |f(t)g'(t) - g(t)f'(t)|\,dt$.

   (b) Appliquer à la détermination de l'aire de l'astroïde $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$. $\left[\text{Rep : } \dfrac{3\pi a^2}{8}\right]$

   (c) En déduire que en coordonnées polaires, $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta$.

(d) Appliquer à la détermination de l'aire de l'étoile de mer à n branches : $\rho = a(2+\cos n\theta)$. $\left[\text{Rep : } 9/2\pi a^2\right]$.

5. : Deuxième théorème de Guldin :
Soit Δ un domaine quarrable d'aire S que l'on fait tourner autour d'un axe (Oz) ; le domaine Δ se trouve entièrement dans l'un des demi-plans déterminés par l'axe. Le centre d'inertie G de Δ est à la distance d de (Oz). Δ décrit un solide de révolution dont le volume est V.

   (a) Montrer que $V = 2\pi \int\int_\Delta x dx dz = 2\pi d S$ (deuxième *théorème de Guldin*).
   (b) En déduire le volume d'un tore à trou.
   (c) En déduire que le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est l'isobarycentre de ses sommets.
   (d) En déduire le centre d'inertie d'un demi-disque plein homogène.

6. : Déterminer le centre d'inertie :

   (a) d'un tronc de cône de révolution de hauteur h $\left[\text{Rep : } d = \text{distance de } G \text{ à la base } = \dfrac{h}{4}\right]$.
   (b) d'un huitième de sphère de rayon R $\left[\text{Rep : } d\ (G,O) = \dfrac{3\sqrt{3}}{64}R\right]$.

7. : Déterminer le moment d'inertie :

   (a) d'une plaque carrée homogène par rapport à son centre. $\left[\text{Rep : } \dfrac{2}{3}mR^2\right]$
   (b) d'un cube plein de côté $2R$ par rapport à un axe passant par les centres de 2 faces opposées $\left[\text{Rep : } \dfrac{2}{3}mR^2\right]$
   (c) d'un cube plein de côté $2R$ par rapport à un axe passant par 2 sommets opposés $\left[\text{Rep : } \dfrac{2}{3}mR^2\right]$

8. : Déterminer le moment d'inertie :

   (a) d'un cylindre plein homogène par rapport à son axe. $\left[\text{Rep : } \dfrac{1}{2}mR^2\right]$
   (b) d'une boule sphérique homogène par rapport à son diamètre. $\left[\text{Rep : } \dfrac{2}{5}mR^2\right]$
   (c) d'un tore plein (à trou) homogène par rapport à son axe. $\left[\text{Rep : } \dfrac{3}{4}mr^2 + mR^2\right]$

   Indication : utiliser les coordonnées toriques : $\left|\begin{array}{l} x = (R+t\cos\lambda)\cos\theta \\ y = (R+t\cos\lambda)\sin\theta \\ z = t\sin\lambda \end{array}\right.$; $\dfrac{dxdydz}{dtd\theta d\lambda} = (R+t\cos\lambda)\,t.$

9. Théorème de Huygens (cas plan).
Montrer que le moment d'inertie d'un domaine (D) de masse m par rapport à un point O est égal à son moment d'inertie par rapport à son centre d'inertie G augmenté de mOG^2.

10. Déterminer le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à l'un des points de sa circonférence en utilisant les coordonnées polaires de centre ce point.
Retrouver ce moment d'inertie en utilisant le théorème de Huygens (ex. 9).

11. : Le problème de la louche.
Jusqu'à quelle hauteur faut-il remplir une louche hémisphérique pour qu'elle soit remplie à moitié ?

12. * : Principe de Cavalieri.

   (a) Montrer que si les intersections de deux solides avec chaque plan ayant une direction donnée (par exemple les plans parallèes à xOy) ont la même aire, alors ces deux solides ont le même volume.

(b) En déduire par exemple que la demi-sphère de rayon R a même volume que le cylindre de rayon R et de hauteur R auquel on a enlevé un tronc de cône de rayon R et de hauteur R.
Rem : ce résulat à été utilisé historiquement pour trouver le volume de la sphère connaissant celui du cône, sans calcul intégral.

13. * : Intersection de deux cylindres orthogonaux de même diamètre (ou "cage à oiseaux").
Soit (S) le solide intersection des deux solides cylindriques orthogonaux $\{x^2 + z^2 \leqslant R^2$ et $\{y^2 + z^2 \leqslant R^2$

   (a) Montrer que l'intersection de (S) avec le plan $z = t$ est un carré d'aire $4\left(R^2 - t^2\right)$.
   (b) En déduire le volume de (S) ; vérifier qu'il est égal au 2/3 du volume du cube circonscrit : $|x|, |y|, |z| \leqslant R$.
EXERCICES SUR DES INÉGALITÉS

14. Inégalité de Tchebychev.
On donne $a < b, f, g$ continues sur $[a, b]$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\iint\limits_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant b} f(x)f(y)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{a\leqslant x,y\leqslant b} f(x)f(y)\,dxdy$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\iint\limits_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant b} (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))\,dxdy = (b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx$.
   (c) En déduire que si f et g sont croissantes sur $[a, b]$, alors $M_{[a,b]}(f)\,M_{[a,b]}(g) \leqslant M_{[a,b]}(fg)$ (il s'agit des valeurs moyennes).

15. Égalité de Lagrange et inégalité de Cauchy-Schwarz.
On donne $a < b, f, g$ continues sur $[a, b]$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 + \iint\limits_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant b} (f(x)g(y) - f(y)\,g(x))^2\,dxdy$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$ et que si g ne s'annule pas sur $[a, b]$, on a égalité dans cette inégalité ssi $\dfrac{f}{g}$ est constante.