

1. : Calculer :

$$(a) I_1 = \int_{0 \leq x, y \leq 1} x^2 y dx dy$$

$$(b) I_2 = \int_{0 \leq x, y \leq 1} x^3 e^{x^2 y} dx dy$$

[Rep : $\frac{e}{2} - 1$]

$$(c) I_3 = \int_{x^2 \leq y \leq x} (x + y) dx dy$$

[Rep : 3/20]

$$(d) I_4 = \int_{\substack{x+y \leq 1 \\ x, y \geq 0}} \ln(1 + x + y) dx dy$$

[Rep: 1/4]

$$(e) I_5 = \int_{\substack{\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1}} (x + y) dx dy$$

[Rep : 2/3]

$$(f) I_6 = \int_{\substack{x^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq 0}} y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

[premier calcul en cartésiennes puis passer en polaires ; Rep : $\frac{1}{2}$]

$$(g) I_7 = \int_{x^2 + y^2 \leq x} (x^2 + y^2 + 1) dx dy$$

[passer en polaires ; Rep : $\frac{11\pi}{32}$]

$$(h) I_8 = \int_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x, y \geq 0}} xy dx dy$$

[Rep : $\frac{a^2 b^2}{8}$].

2. : Partie symétrique et partie antisymétrique d'une fonction de deux variable.

(a) Soit $f \in C([a, b]^2, \mathbb{R})$; montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $(g, h) \in (C([a, b]^2, \mathbb{R}))^2$ tel que $f = g + h$, avec g symétrique et h antisymétrique ($g(x, y) = g(y, x)$ et $h(x, y) = -h(y, x)$).

(b) Montrer que

$$\int_{a \leq x, y \leq b} f(x, y) dx dy = \int_{a \leq x, y \leq b} g(x, y) dx dy.$$

3. : Déterminer le centre d'inertie G d'un secteur de disque homogène d'angle au sommet α de rayon R et de centre O .
Montrer que lorsque $\alpha \rightarrow 0$, $OG \rightarrow \frac{2}{3}R$; pourquoi ceci était-il prévisible ?

4. * : Aire enfermée par une courbe fermée.

On considère une courbe décrite par $M(t) = (f(t), g(t))$, telle que $M(0) = M(T)$; on souhaite déterminer l'aire S du domaine D limité par la courbe.

On suppose que l'application $\begin{cases} [0, T] \times [0, 1] \longrightarrow D \\ (t, u) \longmapsto (uf(t), ug(t)) \end{cases}$ est bijective.

(a) Montrer par un changement de variable que $S = \frac{1}{2} \int_0^T |f(t)g'(t) - g(t)f'(t)| dt$.

(b) Appliquer à l'aire de l'astroïde $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$.

[Rep : $\frac{3\pi a^2}{8}$]

(c) En déduire que en coordonnées polaires, $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta$.

(d) Appliquer à l'aire de la lemniscate de Bernoulli : $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ [Rep : $2a^2$].

5. : Deuxième théorème de Guldin :

Soit Δ un domaine quarrable d'aire S que l'on fait tourner autour d'un axe (Oz) ; le domaine Δ se trouve entièrement dans l'un des demi-plans déterminés par l'axe. Le centre d'inertie G de Δ est à la distance d de (Oz) . Δ décrit un solide de révolution dont le volume est V .

(a) Montrer que $V = 2\pi \int_{\Delta} x dx dz = 2\pi d S$ (deuxième *théorème de Guldin*).

(b) En déduire le volume d'un tore à trou.

(c) En déduire que le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène est l'isobarycentre de ses sommets.

(d) En déduire le centre d'inertie d'un demi-disque plein homogène.

6. : Déterminer le centre d'inertie :

(a) d'un tronc de cône de révolution de hauteur h [Rep : $d =$ distance de G à la base $= \frac{h}{4}$].

(b) d'un huitième de sphère de rayon R [Rep : $d(G, O) = \frac{3\sqrt{3}}{64}R$].

7. : Déterminer le moment d'inertie :

(a) d'une plaque carrée homogène par rapport à son centre. [Rep : $\frac{2}{3}mR^2$]

(b) d'un cube plein de côté $2R$ par rapport à un axe passant par les centres de 2 faces opposées [Rep : $\frac{2}{3}mR^2$]

(c) d'un cube plein de côté $2R$ par rapport à un axe passant par 2 sommets opposés [Rep : $\frac{2}{3}mR^2$]

8. : Déterminer le moment d'inertie :

(a) d'un cylindre plein homogène par rapport à son axe. [Rep : $\frac{1}{2}mR^2$]

(b) d'une boule sphérique homogène par rapport à son diamètre. [Rep : $\frac{2}{5}mR^2$]

(c) d'un tore plein (à trou) homogène par rapport à son axe. [Rep : $\frac{3}{4}mr^2 + mR^2$]

Indication : utiliser les coordonnées toriques : $\begin{cases} x = (R + t \cos \lambda) \cos \theta \\ y = (R + t \cos \lambda) \sin \theta \\ z = t \sin \lambda \end{cases}$; $\frac{dx dy dz}{dt d\theta d\lambda} = (R + t \cos \lambda) t$.

9. Théorème de Huygens (cas plan).

Montrer que le moment d'inertie d'un domaine (D) de masse M par rapport à un point O est égal à son moment d'inertie par rapport à son centre d'inertie G augmenté de $M \cdot OG^2$.

10. Déterminer le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à l'un de ses points en utilisant les coordonnées polaires de centre ce point.

Retrouver ce moment d'inertie en utilisant le théorème de Huygens (ex. 9).

11. : Le problème de la louche.

Jusqu'à quelle hauteur faut-il remplir une louche hémisphérique pour qu'elle soit remplie à moitié ?

12. * : Théorème de Cavalieri.

(a) Montrer que deux solides ont le même volume ssi leurs intersections avec les plans parallèles ayant une direction donnée ont toutes la même aire.

- (b) En déduire par exemple que la demi-sphère de rayon R a même volume que le cylindre de rayon R et de hauteur R auquel on a enlevé un tronc de cône de rayon R et de hauteur R .

Rem : ce résultat à été utilisé historiquement pour trouver le volume de la sphère connaissant celui du cône, sans calcul intégral.

13. * : Intersection de deux cylindres orthogonaux de même diamètre (ou "cage à oiseaux").

Soit (S) le solide intersection des deux solides cylindriques orthogonaux $\{x^2 + z^2 \leq R^2\}$ et $\{y^2 + z^2 \leq R^2\}$

- (a) Montrer que l'intersection de (S) avec le plan $z = t$ est un carré d'aire $4(1 - t^2)$.
- (b) En déduire le volume de (S) ; vérifier qu'il est égal au $2/3$ du volume du cube circonscrit : $|x|, |y|, |z| \leq R$.