1. : Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont des intégrales de fonctions continues ou de fonctions prolongeables en des fonctions continues sur l'intervalle (fermé) d'intégration ? Pour les autres, peut-on quand-même leur donner un sens ?

$$1 : \int_0^2 \frac{dx}{x-1} \quad ; \quad 2 : \int_0^2 \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}dx \quad ; \quad 3 : \int_0^1 \ln x dx \quad ; \quad 4 : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx \quad ; \quad 5 : \int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\frac{1}{x}dx$$

$$6 : \int_0^{\frac{1}{\pi}} x\sin\frac{1}{x}dx \quad ; \quad 7 : \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx \quad ; \quad 8 : \int_0^1 x^x dx \quad .$$

2. : Moyenne, variance et écart-type.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $a \neq b$; on rappelle que la (valeur) moyenne de f sur $[a,b]$ est $M(f) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a}$; on définit la variance de f comme étant la moyenne du carré de l'écart de f avec sa moyenne :

$$V(f) = M\left((f - M(f))^2\right)$$

(a) Montrer que $V(f) = M\left(f^2\right) - (M(f))^2$.

(b) On définit l'*écart-type* de f sur $[a,b]$ comme la racine carrée de sa variance ; montrer que l'écart-type d'une fonction sinusoïdale sur une période est égal à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$; faire le lien avec l'intensité efficace définie en électricité.

$\boxed{\text{CALCULS DE PRIMITIVES}}$

3. : Entraînement au calcul de primitives ou d'intégrales définies.
- S'il y a plusieurs intervalles d'intégration (sur lesquels f est continue) mentionnez-le.
- Abusez du changement de variables, même là où on intégrait "à vue" en terminale S.

(a) <u>première série</u> :

$$\mathbf{1} : \int \left(3x^2-5x\right)^2(6x-5)\,dx \quad ; \ \mathbf{2} : \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin x\ dx \ ; \mathbf{3} : \int \tan^2 x\ dx\ ; \ 4 : \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$5 : \int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^2} \text{ (écrire } a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)\text{) ; } \mathbf{6} : \int \cot^2 x\ dx \quad ;$$

$$\mathbf{7} : \int \frac{x^2}{(x^3+2)^2}dx \quad ; \ \mathbf{8} : \int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx \quad ; \ \mathbf{9} : \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx\ ;$$

$$\mathbf{10} : \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} \quad ; \ \mathbf{11} : \int_0^{\pi/2} \sin x\sin(\cos x)\,dx \quad ; \ \mathbf{12} : \int \sin^2 x\ dx \quad ; \ \mathbf{13} : \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ dx\ ;$$

$$\mathbf{14} : \int \sin^3 x\ dx \quad ; \ \mathbf{15} : \int_0^{\pi/2} \cos^3 x\ dx \quad ; \ \mathbf{16} : \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx \quad ; \ \mathbf{17} : \int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$\mathbf{18} : \int \frac{\ln x}{x}dx\ ; \ \mathbf{19} : \int_0^1 x^2 10^{x^3}dx \quad ; \ \mathbf{20} : \int (\cos x)\,10^{\sin x}dx \quad ;$$

(b) <u>deuxième série</u> : autour de $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$$\mathbf{21} : \int \frac{dx}{x\ln x} \ \mathbf{22} : \int \tan x\ dx \quad ; \ \mathbf{23} : \int \cot x\ dx \quad ;$$

$\mathbf{24} : \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ a) $u = \cos x$; b) $t = \tan\frac{x}{2}$ (résultat $\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$ à connaître)

$\mathbf{25} : \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ a) se ramener au cas précédent ; b) en poser $u = \sin x$;

$\mathbf{26} : \displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$ (écrire $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$)

$\mathbf{27} : f(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x\ dx}{\cos x + \sin x}$ et $g(x) = \displaystyle\int \frac{\sin x\ dx}{\cos x + \sin x}$ (calculer $f(x) \pm g(x)$);

(c) troisième série : intégration par parties

$$\mathbf{28} \ : \ \int_0^1 x^2 e^x dx \ ; \ \mathbf{29} : \int x^2 \sin x dx \ ; \ \mathbf{30} : \int x \arctan x dx \ ; \ \mathbf{31} \int x \ln x dx \ ;$$
$$\mathbf{32} \ : \ \int e^{\sqrt{x}} dx \ ; \mathbf{7} : \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx \ ; \ 33 : \int e^x \sin x dx \ ; \ 34 : \int \cos(\ln x) dx$$

(d) quatrième série : autour de $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$

$$\mathbf{36} \ : \ \int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)} \ ; \ \mathbf{37} : \int \frac{xdx}{1+x^4} ; \mathbf{38} : \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \ ; \ \mathbf{39} : \int \frac{dx}{x^2+a^2} \quad (a>0) ;$$
$$\mathbf{40} \ : \ \int \frac{x^k}{x^2+1} dx \text{ pour } k = 0,1,2,3; \ \mathbf{41} : \int \frac{x^k}{x^2+x+1} dx \text{ (idem)}$$

(e) cinquième série : autour de $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

$$41 \ : \ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0) \ ; \ 4\mathbf{2} : \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}} \ ; 4\mathbf{3} : \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \ ; \mathbf{44} : \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx \ ;$$
$$45 \ : \ \int \frac{x+1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx$$

REP : 45 : $-\sqrt{(x-1)(2-x)} + \frac{5}{2} \arcsin(2x-3)$.

(f) sixième série : fractions rationnelles

$$\mathbf{46} : \int \frac{dx}{x^2-1} \ ; \ \mathbf{47} : \int \frac{x^3}{x^2-1} dx \ ; \mathbf{48} : I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx \text{ ; intégrer par partie et en déduire que}$$
$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n; \text{ en déduire } I_2 \ ; \ \mathbf{49} : \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

(g) septième série : fractions rationnelles en cos et sin

$$\mathbf{50} \ : \ \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx \text{ (poser } u = \cos x) \ ; \ \mathbf{51} : \int \frac{dx}{\cos^3 x} \text{ (poser } u = \sin x)$$
$$\mathbf{52} \ : \ \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} ; a,b>0 \text{ (poser } u = \frac{b}{a} \tan x) \ ; \ \mathbf{53} : \int \frac{dx}{a + b\cos x} \ ; a > |b| \text{ (poser } t = \tan \frac{x}{2})$$

pour **52** et **53** en déduire la moyenne sur une période de la fonction à intégrer.

Rep : 52 : $\frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \tan x\right) + C$; moyenne $= \frac{1}{ab}$;

53 : $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}\right) + C$; moyenne $= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

(h) huitième série : fractions rationnelles en exp (poser $u = e^x$)

$$\mathbf{54} : \int \frac{dx}{(e^x+1)^2} \ ; \ \mathbf{55} : \int \frac{dx}{2+\operatorname{ch} x} \ ; \ \mathbf{56} : \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} 3x} dx$$

Rep : 55 : $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{e^x + 2 - \sqrt{3}}{e^x + 2 + \sqrt{3}} + C$; 56 : $\frac{1}{3} \ln\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{6} \ln\left(\frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + e^x + 1}\right) + C$.

(i) neuvième série : fractions rationnelles en x et en $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (poser $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$)

$$\mathbf{57} : \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx \ ; \ \mathbf{58} : \int \sqrt{1+\frac{1}{x}} dx \ ; \ \mathbf{59} : \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} dx$$

Rep 58 : $\sqrt{x+x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+x}+x}+C$.

Aide pour 59 : $\dfrac{3}{u^3-1}=\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{u+2}{u^2+u+1}$.

(j) dixième série : (fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$; $a\neq 0$)

$$\mathbf{60}\ :\ \int\sqrt{x^2+a^2}dx\ \ (a>0)\quad (x=a\ \mathrm{shu})\ ;\mathbf{61}:\int\sqrt{x^2+x+1}dx\ ;\ \mathbf{62}:\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\mathbf{63}\ :\ \int\sqrt{x^2-a^2}dx\quad (a>0)\quad (|x|=a\ \mathrm{chu});\quad ;\ \mathbf{64}:\int\sqrt{x^2+x}dx\ ;\mathbf{65}:\int\frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$$\mathbf{66}\ :\ \int\sqrt{a^2-x^2}dx\quad (a>0)\quad (x=a\sin u);\ \mathbf{67}:\int\sqrt{-x^2-x}dx\ ;\mathbf{68}:\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Rep : 60 : $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)+C$

63 : $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)+C$

66: $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}\right)+C$

(k) * dernière série : pour les pros

$$\mathbf{69}\ :\ \int x^2e^x\sin x dx\ ;\mathbf{70}:\int\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}dx\quad (\text{lfa } 615)\ ;\mathbf{71}:\int\frac{\sqrt{\cos(2x)}}{\cos x}dx\quad (u=\sin x,\ \text{puis}\sqrt{2}u=\sin v);$$

$$\mathbf{72}\ :\ \int\frac{\ln x}{(\ln x+1)^2}dx$$

Rep 69 : $\dfrac{e^x}{2}(x-1)\left((x+1)\sin x-(x-1)\cos x\right)+C$

Rep 70 : $\sqrt[3]{1+x^3}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x}\right|-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\sqrt[3]{1+x^3}+1}{\sqrt{3}}+C$

Rep 71 : $\sqrt{2}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right)-\arctan\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}+C$.

INTÉGRALES DÉFINIES

4. : Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^2x dx\ \ ;\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos 2x}dx\ ;\ I_3=\int_0^{2a}\left(x\sqrt{2ax-x^2}\right)dx(a>0)$$

REP : $\dfrac{\pi}{32},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right),\ \left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)a^3$.

5. :

(a) Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4dx$.

(b) En déduire un encadrement de $J=\displaystyle\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$ par deux produits de π par un rationnel >0.

(c) Calculer J .

(d) En déduire un encadrement de π par deux rationnels >0 ; donner la meilleure valeur aprochée décimale de π déductible de cet encadrement.

6. : Fonction β (bêta)
Pour $x,y\geqslant 0$, on pose

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^x(1-t)^y dt$$

(a) Prouver : $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

(b) Prouver : $\beta(x,y) = \beta(x,y+1) + \beta(x+1,y)$.

(c) Prouver : $(x+1)\beta(x,y+1) = (y+1)\beta(x+1,y)$.

(d) En déduire une relation entre $\beta(x+1,y)$ et $\beta(x,y)$.

(e) Montrer alors que $\beta(n,p) = \dfrac{n!p!}{(n+p+1)!}$ pour n et $p \in \mathbb{N}$.

(f) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x+1}(\theta)\cos^{2y+1}(\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\beta(x,y)$.

(g) Donner la valeur de $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ à l'aide d'un raisonnement géométrique.

(h) En déduire un calcul rapide de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^4\theta d\theta$.

INTÉGRALES RÉCURRENTES

7. : On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$

(a) Calculer $I_n + I_{n-2}$ $(n \geqslant 2)$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = I_0 + (-1)^{p-1}\ I_{2p}$ et une égalité similaire donnant I_{2p+1}.

(c) Montrer que $\lim I_n = 0$.

(d) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

8. : On pose $I_n(x) = \displaystyle\int x^n e^{\alpha x}dx$

(a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.

(b) En déduire que $I_n(x) = \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k n^{\underline{k}}\dfrac{x^{n-k}}{\alpha^k}\right) + C$ (on rappelle que $n^{\underline{k}} = n(n-1)..(n-k+1)$)

(c) En prenant $\alpha = \pm 1$, en déduire $\displaystyle\int x^n.\operatorname{ch} x\ dx$ et $\displaystyle\int x^n.\operatorname{sh} x\ dx$

(d) Puis avec $\alpha = i$, en déduire $\displaystyle\int x^n.\cos x\ dx$ et $\displaystyle\int x^n.\sin x\ dx$.

9. : On pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p\,dx$;

(a) Trouver une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$; en déduire une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n+p,0}$, puis le calcul de $I_{n,p}$.

(b) Montrer que $I_{n,n} = \dfrac{1}{2.4^n}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)^n du$.

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{2k+1} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

10. : On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$

(a) Justifier l'existence de I_n.

(b) Calculer $I_n - I_{n-2}$ $(n \geqslant 2)$.

(c) Calculer I_0 et I_1.

(d) Exprimer I_{2p} et I_{2p+1}.

11. : On pose $I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} dt$

(a) Justifier l'existence de I_n.

(b) Calculer I_n par récurrence puis directement, et en déduire que

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$$

INTÉGRALE FONCTION DES BORNES

12. : Simplifier l'expression, si elle a un sens, en précisant la propriété que f et g doivent vérifier pour satisfaire aux hypothèses des théorèmes du cours.

(a) $\frac{d}{dx}\left(\int_{37}^{x} f(u)\,du\right)$

(b) $\frac{d}{dx}\left(\int_{x}^{0} f(t)\,dt\right)$

(c) $\frac{d}{dt}\left(\int_{1}^{x} f(t)\,dz\right)$

(d) $\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} f(x)\,dx\right)$

(e) $\frac{d}{dy}\left(\int_{x}^{1} f(x)\,dy\right)$

(f) $\int_{x}^{y} (f(y) + g'(z))\,dz$

(g) $\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x^2} f(t)\,dt\right)$

(h) $\frac{d}{dx}\left(\int_{2}^{2x} f(t)\,dt\right)$

(i) $\frac{d}{dx}\left(\int_{1}^{-x} f(t)\,dt\right)$

(j) $\frac{d}{dx}\left(\int_{2x+1}^{5} f(t)\,dt\right)$

(k) $\frac{d}{dx}\left(\int_{x+2}^{2x^2+1} f(t)\,dt\right)$

(l) $\frac{d}{dz}\left(\int_{\cos z}^{\sin z} f(\alpha)\,d\alpha\right)$

(m) $\frac{d}{d\theta}\left(\int_{\theta}^{\theta^2} f(\varphi^2)\,d\varphi\right)$

(n) $\frac{d}{d\theta}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta^2} \cos\sqrt{\alpha}\,d\alpha\right)$

13. :

(a) Etudier $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ (indication : $f(1/\sqrt{2}) \simeq 0,47$).

(b) * : Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.

14. :

(a) Montrer que si $|u| < 1, (1+u)^{-1/3} \geqslant 1 - \frac{u}{3}$.

(b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{ax} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}}\right) dt = 0 \quad (a > 0)$.

(c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{ax} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3+1}}$;

15. :

(a) Pour quelles valeurs de x a-t-on : $0 \in [x, 2x+1]$?

(b) Étudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x+1} \frac{dt}{e^t - 1}$ sans intégrer.