

INTÉGRATION

FONCTIONS DÉFINIES PAR MORCEAUX

1. : Remplir le tableau suivant (les fonctions sont considérées comme définies sur $[-1, 1]$)

	tracé de la courbe	en escalier ?	affine par morceaux?	continue par morceaux ?	C^1 par morceaux?
$x \mapsto [x]$					
$x \mapsto x - [x]$					
$x \mapsto x^2 - [x^2]$					
$x \mapsto \sqrt{x^2 - [x^2]}$					
$x \mapsto (x - [x])^2$					
$x \mapsto \sqrt{1 - (x - [x])^2}$					
$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto x \left[\frac{1}{x} \right] \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$					
$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \sin \frac{1}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$					
$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto x \cdot \sin \frac{1}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$					

2. : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

- (a) Donner un exemple de fonction prenant un nombre fini de valeurs sur $[a, b]$, et qui ne soit pas en escalier.
 (b) Montrer que f est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si f prend un nombre fini de valeurs sur $[a, b]$ et y possède un nombre fini de points de discontinuité.

INTÉGRALE D'UNE FONCTION CM

3. : Parmi les intégrales suivantes, lesquelles sont des intégrales de fonctions continues par morceaux ou de fonctions prolongeables en des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle (fermé) d'intégration ? Pour les autres, peut-on quand-même leur donner un sens ?

$$1 : \int_0^2 \frac{dx}{x-1} \quad ; \quad 2 : \int_0^2 \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x-1} dx \quad ; \quad 3 : \int_0^1 \ln x dx \quad ; \quad 4 : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx \quad ; \quad 5 : \int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$6 : \int_0^{\frac{1}{\pi}} x \sin \frac{1}{x} dx \quad ; \quad 7 : \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad ; \quad 8 : \int_0^1 x^x dx \quad ; \quad 9 : \int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx$$

4. : Moyenne, variance et écart-type.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, $a \neq b$; on rappelle que la (valeur) moyenne de f sur $[a, b]$ est

$M(f) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$; on définit la variance de f comme étant la moyenne du carré de l'écart de f avec sa moyenne :

$$V(f) = M\left((f - M(f))^2\right)$$

- (a) Montrer que $V(f) = M(f^2) - (M(f))^2$.
- (b) On définit l'écart-type de f sur $[a, b]$ comme la racine carrée de sa variance ; montrer que l'écart-type d'une fonction sinusoïdale sur une période est égal à son amplitude divisée par $\sqrt{2}$; faire le lien avec l'intensité efficace définie en électricité.

5. : Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \neq b$;

- (a) Montrer que si $\int_a^b f = 0$ alors f s'annule en au moins un point de $]a, b[$.
- Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f .
 - Par le théorème de Rolle.
- (b) En déduire que si f continue sur $[0, 1]$ vérifie $\int_0^1 f = 1/2$, f possède au moins un point fixe sur $]0, 1[$.
- (c) En déduire aussi que si f est une fonction réelle continue et périodique sur \mathbb{R} , pour tout réel U il existe un réel a tel que $f(a + U) = f(a)$ (cf exercices 19.a. et 15 continuité pour une autre démonstration).

6. * :

- (a) Proposer une formule explicite pour $f(x) = \int_0^x [\sqrt{t}] dt$.
- (b) Déterminer les points de continuité et les points de dérivabilité de f .
- (c) Vérifier que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^x \sqrt{t} dt$.

7. : Soit f une fonction impaire définie sur \mathbb{R}_+ par : $\begin{cases} x \in [0, 1] \mapsto x \\ x \geq 1 \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (a) Définir la fonction F par intervalles.
- (b) F est-elle continue, dérivable, de classe \mathcal{C}^1 , deux fois dérivable sur \mathbb{R} ?
- (c) F est-elle de classe \mathcal{C}^2 par morceaux sur $[-2, 2]$?

CALCULS DE PRIMITIVES

8. : Entraînement au calcul de primitives.

- S'il y a plusieurs intervalles d'intégration (sur lesquels f est continue) mentionnez-le.
- Abusez du changement de variables, même là où on intégrait "à vue" en terminale S.

(a) première série (chaque série compte pour un exercice) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} & : \int (3x^2 - 5x)^2 (6x - 5) dx \quad ; \quad \mathbf{2} : \int \cos^2 x \sin x dx \quad ; \quad \mathbf{3} : \int \tan^2 x dx \quad ; \quad \mathbf{4} : \int \frac{dx}{1 + \cos x} \\
 \mathbf{5} & : \int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^2} \quad (\text{écrire } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)) \quad ; \quad \mathbf{6} : \int \cot^2 x dx \quad ; \\
 \mathbf{7} & : \int \frac{x^2}{(x^3 + 2)^2} dx \quad ; \quad \mathbf{8} : \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx \quad ; \quad \mathbf{9} : \int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \quad ; \\
 \mathbf{10} & : \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}} \quad ; \quad \mathbf{11} : \int \sin x \sin(\cos x) dx \quad ; \quad \mathbf{12} : \int \sin^2 x dx \quad ; \quad \mathbf{13} : \int \cos^2 x dx \quad ; \\
 \mathbf{14} & : \int \sin^3 x dx \quad ; \quad \mathbf{15} : \int \cos^3 x dx \quad ; \quad \mathbf{16} : \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx \quad ; \quad \mathbf{17} : \int \frac{dx}{\cos^4 x} \\
 \mathbf{18} & : \int \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \mathbf{19} : \int x^2 10^{x^3} dx \quad ; \quad \mathbf{20} : \int (\cos x) 10^{\sin x} dx \quad ;
 \end{aligned}$$

(b) deuxième série : autour de $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$$\begin{aligned} \mathbf{21} : & \int \frac{dx}{x \ln x} \quad \mathbf{22} : \int \tan x \, dx \quad ; \quad \mathbf{23} : \int \cot x \, dx \quad ; \\ \mathbf{24} : & \int \frac{dx}{\sin x} \quad \text{a) } u = \cos x \quad ; \quad \text{b) } t = \tan \frac{x}{2}; \text{résultat } \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \text{ à connaître} \\ \mathbf{25} : & \int \frac{dx}{\cos x} \quad \text{a) se ramener au cas précédent ; b) en posant } u = \sin x; \\ \mathbf{26} : & \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} \quad (\text{écrire } a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)) \\ \mathbf{27} : & f(x) = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos x + \sin x} \quad \text{et } g(x) = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x + \sin x} \quad (\text{calculer } f(x) \pm g(x)); \end{aligned}$$

(c) troisième série : intégration par parties

$$\begin{aligned} \mathbf{28} : & \int x^2 e^x \, dx \quad ; \quad \mathbf{29} : \int x^2 \sin x \, dx \quad ; \quad \mathbf{30} : \int x \arctan x \, dx \quad ; \quad \mathbf{31} : \int x \ln x \, dx \quad ; \\ \mathbf{32} : & \int e^{\sqrt{x}} \, dx \quad ; \quad \mathbf{7} : \int \sin \sqrt{x} \, dx \quad ; \quad \mathbf{33} : \int e^x \sin x \, dx \quad ; \quad \mathbf{34} : \int \cos(\ln x) \, dx \end{aligned}$$

(d) quatrième série : autour de $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$

$$\begin{aligned} \mathbf{35} : & \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (a > 0); \quad \mathbf{36} : \int \frac{x^k}{x^2 + 1} \, dx \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, 3 \quad ; \quad \mathbf{37} : \int \frac{x^k}{x^2 + x + 1} \, dx \quad (\text{idem}) \\ \mathbf{38} : & \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \quad ; \quad \mathbf{39} : \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} \quad ; \quad \mathbf{40} : \int \frac{x \, dx}{1 + x^4} \end{aligned}$$

(e) cinquième série : autour de $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

$$\begin{aligned} \mathbf{41} : & \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0); \quad \mathbf{42} : \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x}} \quad ; \quad \mathbf{43} : \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx \quad ; \quad \mathbf{44} : \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx \quad ; \\ \mathbf{45} : & \int \frac{x+1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} \, dx \end{aligned}$$

(f) sixième série : fractions rationnelles

$$\begin{aligned} \mathbf{46} : & \int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad ; \quad \mathbf{47} : \int \frac{x^3}{x^2 - 1} \, dx \quad ; \quad \mathbf{48} : I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} \, dx \quad ; \quad \text{intégrer par partie et en déduire que} \\ & I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n; \quad \text{en déduire } I_2 \quad ; \quad \mathbf{49} : \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

(g) septième série : fractions rationnelles en cos et sin

$$\begin{aligned} \mathbf{50} : & \int \frac{dx}{\cos^3 x} \quad (\text{poser } u = \sin x); \quad \mathbf{51} : \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx \quad (\text{poser } u = \cos x) \\ \mathbf{52} : & \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}; \quad a, b > 0 \quad (\text{poser } u = \frac{b}{a} \tan x); \quad \mathbf{53} : \int \frac{dx}{a + b \cos x}; \quad a > |b| \quad (\text{poser } t = \tan \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

pour **52** et **53** en déduire la moyenne sur une période des fonctions à intégrer.

$$\text{Rep : } \mathbf{52} : \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + C \quad ; \quad \text{moyenne} = \frac{1}{ab} \quad ;$$

$$\mathbf{53} : \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad ; \quad \text{moyenne} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

(h) huitième série : fractions rationnelles en exp

$$\mathbf{54} : \int \frac{dx}{(e^x + 2)^2} ; \mathbf{55} : \int \frac{dx}{2 + \operatorname{ch} x} ; \mathbf{56} : \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} 3x} dx$$

$$\text{Rep} : \mathbf{55} : \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{e^x + 2 - \sqrt{3}}{e^x + 2 + \sqrt{3}} + C ; \mathbf{56} : \frac{1}{3} \ln \left(\operatorname{th} \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} \right) + C.$$

(i) neuvième série : fractions rationnelles en x et en $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (poser $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$)

$$\mathbf{57} : \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}} ; \mathbf{58} : \int \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$$

$$\text{Rep } \mathbf{58} : \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{\sqrt{x^2+x} + x} + C.$$

(j) dixième série : (fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$; $a \neq 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{59} & : \int \sqrt{x^2+a^2} dx \quad (a > 0) \quad (x = a \operatorname{sh} u) ; \mathbf{60} : \int \sqrt{x^2+x+1} dx ; \mathbf{61} : \int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} ; \mathbf{62} : \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} ; \\ \mathbf{63} & : \int \sqrt{x^2-a^2} dx \quad (a > 0) \quad (|x| = a \operatorname{ch} u) ; \mathbf{64} : \int \sqrt{x^2+ax} dx ; \mathbf{65} : \int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} ; \mathbf{66} : \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} ; \\ \mathbf{67} & : \int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a > 0) \quad (x = a \sin u) ; \mathbf{68} : \int \sqrt{-x^2-ax} dx ; \mathbf{69} : \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} ; \mathbf{70} : \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} ; \end{aligned}$$

$$\text{Rep} : \mathbf{59} : \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})) + C$$

$$\mathbf{63} : \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2-a^2})) + C$$

$$\mathbf{67} : \frac{1}{2} (x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}) + C$$

(k) * dernière série : pour les pros

$$\mathbf{71} : \int x^2 e^x \sin x dx ; \mathbf{72} : \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} dx \quad (\text{lfa 615}) ; \mathbf{73} : \int \frac{\sqrt{\cos(2x)}}{\cos x} dx ; \mathbf{74} : \int \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2} dx$$

$$\text{Rep } \mathbf{71} : \frac{e^x}{2} (x-1)((x+1)\sin x - \cos x) + C$$

$$\text{Rep } \mathbf{72} : \sqrt[3]{1+x^3} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[3]{1+x^3} + 1}{x} \right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt[3]{1+x^3} + 1}{\sqrt{3}} + C$$

9. Déterminer $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ en discutant les divers cas.**INTÉGRALES DÉFINIES**

10. : Calculer les intégrales définies suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x dx ; I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos 2x \sin 3x dx ; I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\cos x \cos 2x} ; I_4 = \int_0^{2a} (x\sqrt{2ax-x^2}) dx$$

11. :

$$(a) \text{ Calculer } I = \int_0^1 x^4 (1-x)^4 dx.$$

$$(b) \text{ En déduire un encadrement de } J = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx \text{ par deux produits de } \pi \text{ par un rationnel } > 0.$$

- (c) Calculer J .
- (d) En déduire un encadrement de π par deux rationnels >0 ; donner la meilleure valeur approchée décimale de π déductible de cet encadrement.

12. : Fonction β (bêta)

Pour $x, y \geq 0$, on pose

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^x (1-t)^y dt$$

- (a) Prouver : $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.
- (b) Prouver : $\beta(x, y) = \beta(x, y+1) + \beta(x+1, y)$.
- (c) Prouver : $(x+1)\beta(x, y+1) = (y+1)\beta(x+1, y)$.
- (d) En déduire une relation entre $\beta(x+1, y)$ et $\beta(x, y)$.
- (e) Montrer alors que $\beta(n, p) = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$ pour n et $p \in \mathbb{N}$.
- (f) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x+1}(\theta) \cos^{2y+1}(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\beta(x, y)$.
- (g) Donner la valeur de $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ à l'aide d'un raisonnement géométrique.
- (h) En déduire un calcul rapide de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^4 \theta d\theta$.

INTÉGRALES RÉCURRENTES

13. : On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

- (a) Calculer $I_n + I_{n-2}$ ($n \geq 2$).
- (b) En déduire que $\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = I_0 + (-1)^{p-1} I_{2p}$ et une égalité similaire donnant I_{2p+1} .
- (c) Montrer que $\lim I_n = 0$.
- (d) En déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

14. : On pose $I_n(x) = \int x^n e^{\alpha x} dx$

- (a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.
- (b) En déduire que $I_n(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k n^k \frac{x^{n-k}}{\alpha^k} \right) + C$ (on rappelle que $n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$)
- (c) En prenant $\alpha = \pm 1$, en déduire $\int x^n \cdot \text{ch } x dx$ et $\int x^n \cdot \text{sh } x dx$
- (d) Puis avec $\alpha = i$, en déduire $\int x^n \cdot \cos x dx$ et $\int x^n \cdot \sin x dx$.

15. : On pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p dx$;

- (a) Trouver une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$; en déduire une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n+p,0}$, puis le calcul de $I_{n,p}$.
- (b) Montrer que $I_{n,n} = \frac{1}{2 \cdot 4^n} \int_{-1}^1 (1-u^2)^n du$.
- (c) En déduire que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{2k+1} = \frac{4^n}{(n+1) \binom{2n}{n}}$.

16. : On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$

- (a) Justifier l'existence de I_n .
- (b) Calculer $I_n - I_{n-2}$ ($n \geq 2$).
- (c) Calculer I_0 et I_1 .
- (d) Exprimer I_{2p} et I_{2p+1} .

17. : On pose $I_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt$

- (a) Justifier l'existence de I_n .
- (b) Calculer I_n par récurrence puis directement, et en déduire que

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$$

INTÉGRALE FONCTION DES BORNES

18. : Simplifier l'expression, si elle a un sens, en précisant la propriété que f et g doivent vérifier pour satisfaire aux hypothèses des théorèmes du cours.

- (a) $\frac{d}{dx} \left(\int_{37}^x f(u) du \right)$
- (b) $\frac{d}{dx} \left(\int_x^0 f(t) dt \right)$
- (c) $\frac{d}{dt} \left(\int_1^x f(t) dz \right)$
- (d) $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(x) dx \right)$
- (e) $\frac{d}{dy} \left(\int_x^1 f(x) dy \right)$
- (f) $\int_x^y (f(y) + g'(z)) dz$
- (g) $\frac{d}{dx} \left(\int_a^{x^2} f(t) dt \right)$
- (h) $\frac{d}{dx} \left(\int_2^{2x} f(t) dt \right)$
- (i) $\frac{d}{dx} \left(\int_1^{-x} f(t) dt \right)$
- (j) $\frac{d}{dx} \left(\int_{2x+1}^5 f(t) dt \right)$
- (k) $\frac{d}{dx} \left(\int_{x+2}^{2x^2+1} f(t) dt \right)$
- (l) $\frac{d}{dz} \left(\int_{\cos z}^{\sin z} f(\alpha) d\alpha \right)$
- (m) $\frac{d}{d\theta} \left(\int_{\theta}^{\theta^2} f(\varphi^2) d\varphi \right)$
- (n) $\frac{d}{d\theta} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta^2} \cos \sqrt{\alpha} d\alpha \right)$

19. : On définit les fonctions f, g, h sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (-1)^{[x]} \quad ; \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt \quad ; \quad h(x) = \int_0^x g(t) dt$$

- (a) Tracer \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h sur un même graphe.
- (b) Montrer que h est de classe \mathcal{C}^1 , mais n'est pas deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

20. :

(a) Etudier $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ (indication : $f(1/\sqrt{2}) \simeq 0,47$).

(b) * : Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.

21. :

(a) Montrer que si $|u| < 1$, $(1+u)^{-1/3} \geq 1 - \frac{u}{3}$.

(b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{ax} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}} \right) dt = 0$ ($a > 0$).

(c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{ax} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3+1}}$;

22. :

(a) Pour quelles valeurs de x a-t-on : $0 \in [x, 2x+1]$?

(b) Étudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x+1} \frac{dt}{e^t - 1}$ sans intégrer.

TAYLOR

23. : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , à valeurs réelles. Redémontrer à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que si $f'' \geq 0$ sur I , alors \mathcal{C}_f est situé au-dessus de ses tangentes.

24. : Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \times 2} + \frac{1}{2^3 \times 3} + \frac{1}{2^4 \times 4} + \dots$; en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

25. :

(a) Déterminer $\arctan^{(n)}(x)$, en utilisant le fait que $\arctan'(x) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x-i} \right)$ (mettre sous-forme réelle).

(b) En déduire que

$$\left| \arctan^{(n)}(x) \right| \leq \frac{(n-1)!}{(x^2+1)^{n/2}} \leq (n-1)!$$

(c) En déduire par l'inégalité de Taylor-Lagrange, que

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$$

Que donne $x = 1$??

SOMMES DE RIEMANN

26. : Applications du théorème des sommes de Riemann.

Déterminer la limite ou un équivalent des sommes suivantes

(a) $u_n = \frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+2a} + \dots + \frac{1}{n+n \times a}$ ($a > -1$)

(b) $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ (attention, il y a un problème à soulever).

(c) $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$.

(d) $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

(e) $\sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$

(f) $u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$ avec x fixé dans $[0, 1]$ et f continue par morceaux sur $[0, 1]$.

27. : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $l = \int_0^1 f(x)dx$.

(a) Montrer que si f est croissante, $0 \leq S_n - l \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$.

(b) * : Montrer que dans tous les cas, $S_n - l \sim \frac{f(1) - f(0)}{2n}$.