FONCTIONS DÉFINIES PAR MORCEAUX

1. : Remplir le tableau suivant (les fonctions sont considérées comme définies sur $[-1,1]$)

	tracé de la courbe	en escalier ?	affine par morceaux?	continue par morceaux ?	C^1par morceaux?
$x \mapsto \lfloor x \rfloor$					
$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$					
$x \mapsto x^2 - \lfloor x^2 \rfloor$					
$x \mapsto \sqrt{x^2 - [x^2]}$					
$x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2$					
$x \mapsto \sqrt{1 - (x - \lfloor x \rfloor)^2}$					
$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$					
$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto \sin \dfrac{1}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$					
$\begin{cases} x \neq 0 \mapsto x.\sin \dfrac{1}{x} \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$					

2. : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$
   (a) Donner un exemple de fonction prenant un nombre fini de valeurs sur $[a,b]$, et qui ne soit pas en escalier.
   (b) Montrer que f est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si f prend un nombre fini de valeurs sur $[a,b]$ et y possède un nombre fini de points de discontinuité.

INTÉGRALE D'UNE FONCTION CM

3. : Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \neq b$;
   (a) Montrer que si $\int_a^b f = 0$ alors f s'annule en au moins un point de $]a,b[$.
      i. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f.
      ii. Par le théorème de Rolle.
   (b) En déduire que si f continue sur $[0,1]$ vérifie $\int_0^1 f = 1/2$, f possède au moins un point fixe sur $]0,1[$.
   (c) En déduire aussi que si f est une fonction réelle continue et périodique sur $\mathbb{R}$, pour tout réel U il existe un réel a tel que $f(a+U) = f(a)$ (cf exercices 19.a. et 15 continuité pour une autre démonstration).

4. * :
   (a) Proposer une formule explicite pour $f(x) = \displaystyle\int_0^x \left[\sqrt{t}\right] dt$.
   (b) Déterminer les points de continuité et les points de dérivabilité de f.
   (c) Vérifier que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\, dt$.

5. : Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\left| \begin{array}{r} x \in [0,1] \mapsto x \\ x \geqslant 1 \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

   (a) Définir la fonction F par intervalles. Tracer, en parallèle, les courbes de f et F.

   (b) F est-elle continue, dérivable, de classe $\mathcal{C}^1$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

   (c) F est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur $[-2,2]$?

TAYLOR

6. : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, à valeurs réelles. Redémontrer à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que si $f'' \geqslant 0$ sur I, alors $\mathcal{C}_f$ est situé au-dessus de ses tangentes.

7. : Calculer $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2 \times 2} + \dfrac{1}{2^3 \times 3} + \dfrac{1}{2^4 \times 4} + \cdots$; en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

8. :

   (a) Déterminer $\arctan^{(n)}(x)$, en utilisant le fait que $\arctan'(x) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{x-i}\right)$ (mettre sous forme réelle).

   (b) En déduire que
$$\left|\arctan^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{(n-1)!}{(x^2+1)^{n/2}} \leqslant (n-1)!$$

   (c) En déduire par l'inégalité de Taylor-Lagrange, que
$$\forall x \in [-1,1] \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$$

   Que donne $x = 1$??

9.

Quelles sont les coordonnées du point limite de cette spirale (supposée continuer à l'infini) ? Quelle est sa longueur ?
Idem en remplaçant $1/n, n \geqslant 1$ par $1/q^n$, $n \geqslant 0$ $(q > 1)$.

SOMMES DE RIEMANN

10. : Applications du théorème des sommes de Riemann.
Déterminer la limite ou un équivalent des sommes suivantes :

   (a) $u_n = \dfrac{1}{n+a} + \dfrac{1}{n+2a} + \cdots + \dfrac{1}{n + n \times a}$ $(a > 0)$

   (b) $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (attention, il y a un problème à soulever).

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}$.

(d) $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$

(e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$ avec x fixé dans $[0,1]$ et f continue par morceaux sur $[0,1]$.

11. : Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $l = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

(a) Montrer que si f est croissante, $0 \leqslant S_n - l \leqslant \dfrac{f(1) - f(0)}{n}$.

(b) * : Montrer que dans tous les cas, $S_n - l \sim \dfrac{f(1) - f(0)}{2n}$.